Programme de colles : semaine 27b, du 2/6 au 6/6

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.
Conformément au colloscope, sur ces 2 semaines, seules auront lieu les colles des lundi 26/5, mardi 27/5, jeudi 5/6 et vendredi 6/6.

1 Informatique en langage Python

Exemples d'algorithmes permettant de trouver une approximation de la solution d'une équation du type $f(x) = 0$: algorithme de la dichotomie, méthode de Newton.

Ces algorithmes ne doivent pas être connus par cœur, mais pourront faire l'objet d'exercices où ils sont rappelés ou rappelés partiellement.

2 Dérivabilité

- dérivée d'une fonction :
  - définition et interprétation graphique comme coefficient directeur de la tangente. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
  - dérivée à droite/à gauche. f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
  - dérivable implique continue
- calculs de dérivées :
  - justification de la dérivabilité d'une fonction en tant que produit, somme, quotient, composée
  - dérivée de la bijection réciproque : si f est bijective et si $f(x_0) = y_0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 ssi $f'(x_0) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.
  - révision du théorème de la bijection
- dérivées d'ordre supérieur, régularité :
  - notion de dérivée n-ème. Exemple du calcul des dérivées n-ème de fonctions puissances
  - notion de classe de régularité : f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I lorsqu'elle y est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ y est continue. Régularité $\mathcal{C}^\infty$
  - exemple de fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$: $x \longmapsto x^2 \sin(1/x)$
  - Exemples d'études de régularité en un point de "recollement"
- théorèmes usuels :
  - notion d'extremum local
  - si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrêmité de I, et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
  - théorème de Rolle
  - théorème des accroissements finis : *on demande de toujours revenir à l'égalité des accroissements finis* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ *; l'inégalité des accroissements finis et la majoration* $|f(b)-f(a)| \leq K|b-a|$ *si* $|f'| \leq K$ *ont été traités en cours mais doivent être redémontrés*
  - utilisation du théorème des accroissements finis : obtention d'inégalités ; étude de la convergence de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ vers un point fixe contractant
  - lien entre dérivée et sens de variation

3 Variables aléatoires réelles finies

Début de chapitre uniquement, on posera des exercices simples d'application directe du cours.

Les points suivants n'ont pas encore été abordés en classe : fonction de répartition, variance, indépendance de variables aléatoires.

- loi d'une variable aléatoire :
  - événements $(X = x)$,$(X \leq x)$,$(X > x)$
  - la famille $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements. En particulier, $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$
  - loi de X : $f_X : x \longmapsto \mathbb{P}(X = x)$, représentation en tableau
- espérance d'une variable aléatoire :
  - définition et interprétation comme moyenne de X
  - linéarité et croissance de l'espérance *(la linéarité a été admise)*
  - formule de transfert *(résultat admis)* : si $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$
  - variable centrée, $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- lois usuelles : pour chacune des lois suivantes sont à connaître : la définition, l'espérance et le type d'expérience aléatoire qu'elles modélisent :
  - loi certaine
  - loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
    Si $A \subset \Omega$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p = \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
    Exemple d'écriture d'une loi de Rademacher en fonction d'une loi de Bernoulli.
  - loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
  - loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
    La formule de l'espérance d'une loi $\mathcal{B}(n, p)$ sera vue uniquement lundi 2/6.
    remarque :
    $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \iff X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions de "f est continue en x_0" et de "f est dérivable en x_0". Quelle notion implique l'autre ?
2. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f. Appliquez cette formule dans le cas d'une fonction f choisie par l'examinateur.
3. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable sur I. Énoncer le théorème donnant à quelle condition f^{-1} est dérivable en $y \in J$ et donner la formule exprimant $(f^{-1})'(y)$.
4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I".
5. Énoncer le théorème de Rolle et l'illustrer sur un dessin.
6. Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer sur un dessin.
7. On admet la linéarité de $\mathbb{E}$ et que si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Démontrer que si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.
8. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (ou une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ou une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$) ? Donner ensuite la formule de son espérance.
9. Soit $A \subset \Omega$, donner la définition de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ et préciser sa loi.
10. Quand dit-on qu'une variable aléatoire est centrée ? Démontrer que si X est une variable aléatoire finie alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.