Espérance, variance, histogramme — TP22

Exercice 1 — Des( )espérances

Q1 Écrire une fonction simulant une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $b(p)$.

Q2 En déduire une fonction simulant la valeur d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Q3 En utilisant la fonction précédente, estimer l'espérance et la variance de X. On vérifiera avec les valeurs exactes (qui doivent être connues).

Q4 Pour $a < b$ deux entiers, écrire une fonction simulant la valeur d'une variable aléatoire Y suivant une loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

Q5 En utilisant la fonction précédente, estimer l'espérance et la variance de Y. On vérifiera avec les valeurs exactes dans le cas $a = 1$ et $b = n$ (la valeur de l'espérance doit être connue, celle pour la variance non : on a $V(Y) = (n^2 - 1)/12$).

Exercice 2 — Tracé d'histogramme

Q1 Écrire une fonction simulant une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(10, \frac{2}{5})$.

Q2 Créer une liste `L` contenant 10 000 réalisations de X.

Q3 Créer une liste `repartition` telle que `repartition[i]` contienne la proportion d'éléments de `L` égaux à i. En d'autres termes, de quoi `repartition[i]` est-il une approximation ?

Q4 Afficher alors l'histogramme de la loi de X c'est-à-dire le graphe donnant $\mathbb{P}(X = i)$ en fonction de i.

On considère une population de $5N$ individus dont 2 cinquièmes a un gêne g donné. On choisit 10 personnes distinctes dans la population et on appelle X_N le nombre de ces personnes ayant le gêne g.

Q5 Expliquez pourquoi X_N ne suit pas une loi $\mathcal{B}(10, \frac{2}{5})$.

Q6 Écrire une fonction simulant la variable aléatoire X_N.

Q7 En suivant la même méthode que pour X, construire l'histogramme de X_N.

Q8 Afficher les histogrammes de X et de X_N sur le même dessin. Que constate-t-on pour N grand ?

Exercice 3 — Mélange

On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3. On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée détapes selon le protocole suivant.

À chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose qu'initialement toutes les boules sont dans l'urne A c'est-à-dire que $X_0 = 3$.

Q1 Écrire une fonction prenant en argument une liste `L` et un nombre `a` et renvoyant l'indice de `a` dans `L`.

Q2 Écrire une fonction simulant la variable X_n. *On rappelle qu'on peut utiliser la commande `x in L` renvoyant `True` si `x` appartient à `L` et `False` sinon.*

Q3 Déterminer à l'aide de l'ordinateur les valeurs de $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$. Vers quelle loi usuelle la suite de variables aléatoires (X_n) *converge*[1]-t-elle ?

Exercice 4 — Simuler à partir de la loi

On rappelle que donner la loi d'une variable aléatoire X peut se faire en donnant le tableau suivant :

$X(\Omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X = .)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

où $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Q1 Écrire un code Python simulant la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$X(\Omega)$	-2	3	4	10
$\mathbb{P}(X = .)$	$0,1$	$0,4$	$0,3$	$0,2$

Q2 Quelles conditions doivent satisfaire les nombres p_i pour avoir une loi de probabilité ? On place les nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ dans une liste `P`. Écrire une fonction prenant `P` en argument et renvoyant `True` si les conditions pour avoir une loi de probabilité sont satisfaites, et `False` sinon.

Dans la suite de l'exercice, on souhaite généraliser la question 1 et écrire une fonction simulant une variable aléatoire X de loi donnée par le tableau

$X(\Omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X = .)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

.

Q3 Écrire une fonction prenant en argument la liste `P` = `[`$p_1, p_2, \dots, p_n$`]` et renvoyant la liste `[`p_1 , $p_1 + p_2$, $p_1 + p_2 + p_3$, $\dots$, $p_1 + \dots + p_n$`]`.

Q4 Écrire une fonction prenant en argument un réel t et une liste `L` de n nombres rangés dans l'ordre croissant et renvoyant :

- 0 si $t <$ `L[0]`
- 1 si `L[0]` $\leq t <$ `L[1]`
- 2 si `L[1]` $\leq t <$ `L[2]`
- $\dots$
- $n-1$ si `L[`n`-2]` $\leq t <$ `L[`n`-1]`
- n si $t \geq$ `L[`$n-1$`]`.

Q5 On place les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ prises par X dans une liste `V`, et les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ dans une liste `P`. En utilisant les fonctions précédentes, écrire une fonction prenant `V` et `P` en arguments et simulant la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau au début de l'exercice.

Exercice 5 — Fléchettes

On considère un carré $\mathcal{C}$ de côté 2 contenant un disque $\mathcal{D}$ de rayon 1, tous les deux centrés en l'origine. On place un point $M(x,y)$ au hasard dans le carré $\mathcal{C}$, et on s'intéresse à la probabilité que M appartienne au dique $\mathcal{D}$.

Q1 Quelle est l'aire de $\mathcal{D}$? Quelle est la probabilité que M appartienne à $\mathcal{D}$?

Q2 En déduire un code Python permettant d'obtenir une approximation de π.

1. La notion de convergence de variable aléatoire sera définie en 2ème année.