Correction "DM" : TD 21 exos 1, 4, 10

exo 1 :

1) Il faut $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$ d'où $\lambda = \frac{1}{21}$

2) $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\forall k \in [\![1,6]\!],\ p_k = \lambda k = \frac{k}{21}$

3) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21} = \frac{13}{3}$

4) Par transfert,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} \times \frac{k}{21} = \frac{2}{7}$$

exo 4

1) Le cours donne

$X(\Omega)$	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{4} k\,\mathbb{P}(X=k) = 0\times\frac{1}{16} + 1\times\frac{4}{16} + \dots + 4\times\frac{1}{16} = 2$

2) $(X-2)^2(\Omega) = \{(x-2)^2,\ x\in X(\Omega)\} = \{(x-2)^2,\ x \in [\![0,4]\!]\} = \{0,1,4\}$

et $\cdot\ ((X-2)^2 = 0) = (X=2)$ donc $\mathbb{P}((X-2)^2=0) = \mathbb{P}(X=2)$

$\cdot\ ((X-2)^2 = 1) = (X=1)\cup(X=3)$ avec $(X=1)$ et $(X=3)$ disjoints donc $\mathbb{P}((X-2)^2=1) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=3)$.

$\cdot$ De m̂ $\mathbb{P}((X-2)^2=4) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=4)$

d'où la loi

$(X-2)^2(\Omega)$	0	1	4
$\mathbb{P}((X-2)^2=k)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Et donc $\mathbb{E}((X-2)^2) = 0\times\frac{3}{8} + 1\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{1}{8} = 1$

3) Par transfert, $\mathbb{E}((X-2)^2) = \sum_{k=0}^{4} (k-2)^2\,\mathbb{P}(X=k) = (-2)^2\times\frac{1}{16} + (-1)^2\times\frac{4}{16} + \dots + 2^2\times\frac{1}{16} = 1$

exo 10

1) a) $(X=n+1) = \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \dots \cap \overline{R}_n$ et comme les R_i sont mutuellement indépendants

$\mathbb{P}(X=n+1) = \mathbb{P}(\overline{R}_1)\times\mathbb{P}(\overline{R}_2)\times\dots\times\mathbb{P}(\overline{R}_n) = (1-p)^n$.

Or "retenir un candidat" $= \overline{(X=n+1)}$ donc la proba voulue est $1-(1-p)^n$.

b) On veut $1-(1-p)^n \geq \frac{1}{2} \iff \dots \iff p \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$

2) Pour $k\in[\![1,n]\!]$, $(X=k) = \overline{R}_1\cap\overline{R}_2\cap\dots\cap\overline{R}_{k-1}\cap R_k$ et $(X=n+1) = \overline{R}_1\cap\dots\cap\overline{R}_n$

3) Par indépendance des R_i : pour $k\in[\![1,n]\!]$ $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{R}_1)\,\mathbb{P}(\overline{R}_2)\dots\mathbb{P}(\overline{R}_{k-1})\,\mathbb{P}(R_k) = (1-p)^{k-1}p$

et $\mathbb{P}(X=n+1) = (1-p)^n$. D'où la loi :

$X(\Omega)$	1	2	3	...	n	$n+1$
$\mathbb{P}(X=k)$	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$		$p(1-p)^{n-1}$	$(1-p)^n$

On calcule alors $\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=n+1) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)$

$$= (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^n + p\sum_{j=0}^{n-1}(1-p)^j = (1-p)^n + p\,\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1$$

4) D'une part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

donc $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$

donc $f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

5) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k \times p(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n$$

$$= (n+1)(1-p)^n + p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}$$

grâce à Q4 avec $x = 1-p$

$$= (n+1)(1-p)^n + p\,\frac{1 - (n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}}{(1-(1-p))^2}$$

$$= (n+1)(1-p)^n + \frac{1}{p}\left(1 - (1-p)^n \times (n+1 - (1-p)n)\right)$$

$$= (n+1)(1-p)^n + \frac{1}{p}\left(1 - (1-p)^n(1+np)\right)$$

$$= \frac{1 - (1+np)(1-p)^n + p(n+1)(1-p)^n}{p}$$

$$= \frac{1 - (1-p)^n \times (1 + np - p(n+1))}{p}$$

$$= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p}$$