Programme de colles : semaine 28, du 9/6 au 13/6

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Informatique en langage Python

- simulation de variables aléatoires, estimation d'une espérance, d'une variance.

2 Variables aléatoires réelles finies

Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev sont uniquement au programme de 2ème année.

- loi d'une variable aléatoire :
  - événements $(X = x)$,$(X \leq x)$,$(X > x)$
  - la famille $(X = x)_{x\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements.
    En particulier, $\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$
  - loi de X : $f_X : x \longmapsto \mathbb{P}(X = x)$, représentation en tableau
  - fonction de répartition de X :
    $F_X : x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ et expression de F_X en fonction des $\mathbb{P}(X = x_k)$.*(Les résulats généraux concernant les fonctions de répartition (caractère càdlàg) ne seront vus qu'en 2ème année)*
  - pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,
    $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
    Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$,
    $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$
- espérance d'une variable aléatoire :
  - définition et interprétation comme moyenne de X
  - linéarité et croissance de l'espérance *(la linéarité a été admise)*
  - formule de transfert *(résultat admis)* :
    si $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, alors
    $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$
  - variable centrée, $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- lois usuelles : pour chacune des lois suivantes sont à connaître : la définition, l'espérance la variance (sauf mention du contraire) et le type d'expérience aléatoire qu'elles modélisent :
  - loi certaine
  - loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
    Si $A \subset \Omega$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p = \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
    Exemple d'écriture d'une loi de Rademacher en fonction d'une loi de Bernoulli.
  - loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$ *La formule de la variance n'est pas à connaître par cœur mais doit pouvoir être retrouvée.*
  - loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
    remarque :
    $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \iff X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- variance d'une variable aléatoire :
  - définition et formule de König-Huygens : $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
  - écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, interprétation comme mesure de la “dispersion” de X
  - $V(X) = 0$ ssi X est de loi certaine
  - $V(aX + b) = a^2V(X)$
  - variable réduite, $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est toujours centrée réduite
- indépendance de variables aléatoires :
  - X et Y sont indépendantes lorsque : $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
    $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$
    ou encore : $\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega)$,
    $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$
  - si X et Y sont indépendantes alors pour toutes fonctions u et v, $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes *(ce résultat a été admis)*
  - si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
  - généralisation de ces résultats à l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires *(l'indépendance deux à deux de n variables aléatoires n'a pas été présentée)*
  - loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes
  - si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de même loi $b(p)$ alors $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
  - si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$ *(la formule de Vandermonde n'est pas à connaître par cœur)*
  - loi du minimum ou du maximum de 2 variables aléatoires indépendantes

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer le théorème de Rolle et l'illustrer sur un dessin.
2. Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer sur un dessin.
3. On admet la linéarité de $\mathbb{E}$ et que si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Démontrer que si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.
4. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (ou une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ou une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$) ? Donner ensuite la formule de son espérance et de sa variance (sauf pour la loi uniforme).
5. Soit $A \subset \Omega$, donner la définition de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ et préciser sa loi.
6. Quand dit-on qu'une variable aléatoire est centrée (et/ou réduite) ? Démontrer que si X est une variable aléatoire finie alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée (et/ou $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée-réduite).
7. Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ? Tracer le graphe de cette fonction dans le cas où X suit une loi usuelle simple choisie par l'examinateur.
8. Donner la défintion de la variance d'une variable aléatoire, puis énoncer et démontrer la formule de König-Huygens.
9. Quand dit-on que 2 variables aléatoires réelles finies X et Y sont indépendantes ?
10. On admet que si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
11. Écrire un programme Python simulant une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En déduire un code permettant d'estimer la valeur de l'espérance et de la variance de cette loi.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.