

Exercice 1 (intégration directe)

Calculer les intégrales suivantes :

1. (a) $\int_1^2 x^2 - 1 \, dx$ (b) $\int_{-1}^1 x^5 - 5x^3 \, dx$ (c) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(t) \, dt$ (d) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$	2. (a) $\int_0^2 (x+1)^7 \, dx$ (b) $\int_0^2 (2x+1)^7 \, dx$ (c) $\int_0^1 e^{2x} + e^{1-x} \, dx$ (d) $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x) \, dx$	3. (a) $\int_0^1 x^5 \cos(x^6) \, dx$ (b) $\int_1^2 x e^{1-x^2} \, dx$ (c) $\int_1^e \frac{(\ln(x))^5}{x} \, dx$ (d) $\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^4} \, dt$
--	---	---

Exercice 2 (intégration par parties)

1. Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties :

(a) $\int_0^{\pi/4} t \cos(2t) \, dt$	(b) $\int_0^1 t^2 e^{-t} \, dt$	(c) $\int_1^2 \sqrt{t} \ln(t) \, dt$
---------------------------------------	---------------------------------	--------------------------------------

2. Calculer pour tout $x > 0$ les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^x e^t \sin(t) \, dt$	(b) $\int_1^x \sin(\ln(t)) \, dt$	(c) $\int_0^x e^{-t} \ln(e^{2t} + 1) \, dt$
----------------------------------	-----------------------------------	---

3. Déterminer les primitives de :

(a) $\arctan$ sur $\mathbb{R}$	(b) $x \mapsto x^2 \ln x$ sur $\mathbb{R}_*^+$	(c) $x \mapsto \ln(x)^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$
--------------------------------	--	---

Exercice 3 (changement de variables)

Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. (a) $\int_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi)} e^t \cos(e^t) \, dt$ via $u = e^t$ (b) $\int_1^4 \frac{(\sqrt{t}-1)^4}{\sqrt{t}} \, dt$ via $u = \sqrt{t}$ (c) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sin(t)} \, dt$ via $u = \sin(t)$	2. (a) $\int_1^2 \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x^2} \, dx$ via $t = \frac{1}{x}$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} \, dt$ avec $u = e^t$ (c) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx$ via $u = \sqrt{1+x}$
---	---

3. (a) $\int_e^x \frac{\ln(\ln(t))}{t} \, dt$ via $u = \ln(t)$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \, dt$ via un changement de variables à déterminer (c) $\int_1^x e^{\sqrt{t}} \, dt$ via $u = \sqrt{t}$	
--	--

Exercice 4

Soient $S = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$ et $C = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$.

1. Effectuer les changements de variables $u = \cos(t)$ sur S , et $u = \sin(t)$ sur C .
2. Calculer $C + S$.
3. En déduire les valeurs de C et de S .

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

1. Déterminer le sens de variation des suites $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de (J_n) et donner un équivalent de J_n .

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx$.

1. Etudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ .
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire la valeur de ℓ .

Exercice 7

On considère la fonction ϕ définie sur $]0, +\infty[$ par : $\phi(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Déterminer le sens de variation de ϕ sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier le signe de $g(x) = \phi(x) - \ln x$ pour tout réel $x > 0$.

On pourra écrire $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

3. En déduire la limite de ϕ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

On commencera par faire un dessin pour représenter la situation.

Exercice 9

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f \leq \sum_{k=1}^n f(k). \text{ On commencera par faire un dessin.}$$

2. On suppose que f est décroissante. Quelle inégalité similaire peut-on obtenir ?

3. Démontrer que la série harmonique $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1}$ diverge.