Programme de colles : semaine 29, du 16/6 au 20/6

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

Le point en rouge sera vu uniquement lundi 16/6.

1 Informatique en langage Python

simulation de variables aléatoires, estimation d'une espérance, d'une variance.

2 Variables aléatoires réelles finies

Reprise du programme précédent.

3 Intégration

Attention : nous n'avons pas encore fait d'exercice en TD sur ce chapitre.

- On rappelle que des calculs de primitives et d'intégrales (sans IPP ni changement de variables) ont été faits au cours de l'année en remédiation : voir feuilles de remédiation 9, 10 et 11.
- par définition, on pose $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$
- règles de calculs pour les intégrales : linéarité, Chasles, $\int_a^a f = 0$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$
- positivité et croissance de l'intégrale, application à des études de suites définies par une intégrale (sens de variation, limite par encadrement)
- inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$
- si f est continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b]$
- la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a
- dérivation d'expressions du type $\phi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ où f est continue sur $[a, b]$ et u et v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $[a, b]$. La formule ne doit pas être apprise par cœur mais redémontrée dans les exercices.
- interprétation de l'intégrale comme aire sous la courbe
- somme de Riemann d'une fonction continue. On note $R_{n,g}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $R_{n,d}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,g}(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,d}(f) = \int_a^b f$. Application au calcul approché d'intégrale en Python.
- intégration par parties
- changement de variables. Les élèves sont encouragés à présenter les changements de variables "à la physicienne".
- si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et paire (resp. impaire) alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$ (resp. $\int_{-a}^a f = 0$).

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ? Tracer le graphe de cette fonction dans le cas où X suit une loi usuelle simple choisie par l'examineur.
2. Donner la définition de la variance d'une variable aléatoire, puis énoncer et démontrer la formule de König-Huygens.
3. Quand dit-on que 2 variables aléatoires réelles finies X et Y sont indépendantes?
4. On admet que si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
5. Écrire un programme Python simulant une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En déduire un code permettant d'estimer la valeur de l'espérance et de la variance de cette loi.
6. Énoncer et démontrer le résultat appelé : "positivité de l'intégrale".
7. Donner la définition des sommes de Riemann d'une fonction f définie sur $[0, 1]$. Que peut-on dire de ces sommes?
8. Énoncer le théorème d'intégrations par parties.
9. Déterminer les primitives de $\ln$ sur $\mathbb{R}_*^+$ grâce à une intégrations par parties.

La question de cours est notée sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.