

Mathématiques - mercredi 18 juin 2025
Devoir n°9 Durée : 1 h

- Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.
- Ce sujet comporte 3 pages et 20 questions. Il s'agit d'un QCM, écrivez la lettre de votre réponse dans le cadre "réponse choisie". Les parties grisées sont réservées à la correction, merci de ne rien écrire dedans.
- Les questions sont indépendantes et il y a une seule bonne réponse par question. Chaque bonne réponse rapporte 1 point mais une réponse erronée coûte 0,5 point. Si aucune réponse n'est donnée la question rapporte 0 point.
- Merci de ne pas dégrafer le sujet.

NOM :

PRÉNOM :

Question et réponses possibles	Réponse choisie	B.R.	M.R.
Q1. Pour $n \in \mathbb{N}$ combien vaut $\int_0^1 t^n dt$? A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{1}{n+1}$ C) $\frac{1}{n-1}$ D) $\frac{n}{n+1}$	B		
Q2. Laquelle des fonctions suivantes est une primitive sur $\mathbb{R}_*^+$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$? A) $x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$ B) $x \mapsto -\frac{2}{x^2}$ C) $x \mapsto -\frac{4}{x^4}$ D) $x \mapsto -\frac{1}{4x^4}$	A		
Q3. Combien vaut $\int_0^1 (2x-1)^4 dx$? A) 0 B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{10}$	B		
Q4. Combien vaut $\int_0^x t e^{3t} dt$? (on effectuera une IPP) A) $\frac{2e^{3x}+1}{9}$ B) $\frac{(3x-1)e^{3x}-1}{9}$ C) $\frac{(3x-1)e^{3x}+1}{9}$ D) $\frac{(x-1)e^{3x}+1}{9}$	C		

Q5. Pour $x > 0$ on note $\phi(x) = \int_{x-1}^{x+1} \ln(1+t) dt$. Combien vaut $\phi'(x)$? A) $-\frac{2}{x^2-1}$ B) $\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)$ C) $-\frac{2}{x(x+2)}$ D) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$	D		
Q6. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f en $\sqrt{3}$? A) $y = \frac{9-2\sqrt{3}x}{9}$ B) $y = \frac{3-2\sqrt{3}x}{9}$ C) $y = \frac{2\sqrt{3}x-3}{9}$ D) $y = \frac{4-\sqrt{3}x}{3}$	A		
Q7. Si je réponds au hasard à cette question et que X désigne le nombre de points que cela me rapporte, alors... A) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ B) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{4})$ C) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 4])$ D) Aucune de ces réponses	D		
Q8. Si je réponds au hasard à cette question et que X désigne le nombre de points que cela me rapporte, alors $\mathbb{E}(X)$ vaut A) 0 B) $-\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{3}{8}$	B		
Q9. Si je réponds à toutes les questions de ce test au hasard et si N désigne mon nombre de bonnes réponses alors... A) $N \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{4})$ B) $N \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 20])$ C) $N \hookrightarrow \mathcal{B}(20, \frac{1}{4})$ D) Aucune de ces réponses	C		
Q10. On tire simultanément 4 boules dans une urne contenant 10 boules noires et 10 boules blanches. On note X le nombre de boules blanches obtenues alors... A) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{2}{5})$ B) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 4])$ C) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, \frac{2}{5})$ D) Aucune de ces réponses	D		
Q11. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{1}{3})$, combien vaut $\mathbb{P}(X = 3)$? A) $\frac{2}{3^4}$ B) $\frac{8}{3^4}$ C) $\frac{1}{3^3}$ D) $\frac{4}{3^3}$	B		
Q12. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [1, n]$ et $\forall k \in [1, n]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\alpha k^2}{n(n+1)}$, combien vaut la constante α ? A) $\frac{3}{n+2}$ B) $\frac{3}{2n+1}$ C) $\frac{6}{n+2}$ D) $\frac{6}{2n+1}$	D		

Q13. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{3})$, si $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 2])$ et si X et Y sont indépendantes, combien vaut $\mathbb{P}(X + Y = 2)$? A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{4}{9}$	A		
Q14. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction : A) $x \mapsto \mathbb{P}(X \geq x)$ B) $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ C) $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ D) Aucune de ces réponses	B		
Q15. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2, 7])$, combien vaut $\mathbb{P}(X \leq 4)$? A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{4}{7}$	B		
Q16. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: A) $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1)$ B) $\mathbb{P}(X = k + 1) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k + 1)$ C) $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k + 1)$ D) $\mathbb{P}(X = k - 1) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k - 1)$	A		
Q17. Si $X(\Omega) = \{-2, 1\}$ et que $\mathbb{P}(X = 1) = p$, combien vaut $\mathbb{E}(X)$? A) $2p$ B) $-2p - 2$ C) $3p - 2$ D) On ne peut pas savoir	C		
Q18. Si $X(\Omega) = \{-2, 1, 2\}$ et que $\mathbb{P}(X = 1) = p$, combien vaut $\mathbb{E}(X^2)$? A) p^2 B) $3p^2 - 2$ C) $4 - 3p$ D) On ne peut pas savoir	C		
Q19. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ alors : A) $\mathbb{E}(X + Y) = (n + m)p$ et $\mathbb{V}(X + Y) = (n + m)p^2$ B) $\mathbb{E}(X + Y) = (n + m)p$ et $\mathbb{V}(X + Y) = (n + m)p(1 - p)$ C) $\mathbb{E}(X + Y) = (n + m)p$ et on ne peut pas calculer $\mathbb{V}(X + Y)$ D) On ne peut savoir ni la valeur de $\mathbb{E}(X + Y)$ ni celle de $\mathbb{V}(X + Y)$	C		
Q20. Si X est une variable aléatoire réelle finie, laquelle des situations suivantes est impossible ? A) $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\mathbb{E}(X^2) = 3$ B) $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{E}(X^2) = 5$ C) $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\mathbb{E}(X^2) = 4$ D) $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) = 4$	A		
Total de bonnes réponses (B.R.) et de mauvaises réponses (M.R.) :			

Note finale sur 20 (nombre de B.R. - $\frac{1}{2} \times$ nombre de M.R.) :

DS 9 : corrigé

$$\text{Q1)} \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \text{B)}$$

$$\text{Q2)} \frac{1}{x^3} = x^{-3} \xrightarrow{\text{int.}} \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} \quad \text{A)}$$

$$\text{Q3)} \int_0^1 (2x-1)^4 dx = \left[\frac{(2x-1)^5}{2 \times 5} \right]_0^1 = \frac{1}{10} - \frac{(-1)^5}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{B)}$$

$$\begin{aligned} \text{Q4)} \int_0^x t e^{3t} dt &= \left[t \frac{e^{3t}}{3} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{3t}}{3} dt \\ &= \frac{x e^{3x}}{3} - \left[\frac{e^{3t}}{9} \right]_0^x = \frac{3x e^{3x} - (e^{3x} - e^0)}{9} \\ &= \frac{(3x-1)e^{3x} + 1}{9} \quad \text{C)} \end{aligned}$$

$$\text{Q5)} \phi(x) = \ln(1+x+1) - \ln(1+x-1) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \quad \text{D)}$$

$$\begin{aligned} \text{Q6)} y &= f(\sqrt{3}) + f'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) \quad \text{avec } f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}, \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}}(x-\sqrt{3}) \quad \text{dmc } f'(\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}x}{9} + \frac{2}{3} = \frac{9-2\sqrt{3}x}{9} \quad \text{A)} \end{aligned}$$

$$\text{Q7)} X(\omega) = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\} \quad \text{dmc D)}$$

$$\begin{aligned} \text{Q8)} P(X=1) &= \frac{1}{4}, \quad P(X=-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \quad \text{dmc } E(X) = 1 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{8} \\ &\quad \text{dmc B)} \end{aligned}$$

$$\text{Q9)} \text{ C)}$$

$$\text{Q10)} \text{ "simultanément" dmc pas d'indépendance dmc D)}$$

$$Q11) P(X=3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{3^4} \quad B)$$

$$Q12) \sum_{k=1}^n P(X=k) = \frac{\alpha}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 \quad \text{dmc} \quad \alpha = \frac{6}{2n+1} \quad D)$$

$$Q13) P(X+Y=2) = P(X=0)P(Y=2) + P(X=1)P(Y=1) \\ = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad A)$$

Q14) B)

$$Q15) P(X \leq 4) = \frac{\text{Card}([2, 4])}{\text{Card}([2, 7])} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad B)$$

$$Q16) (X=k) = (X \geq k) \setminus (X \geq k+1) \quad \text{dmc} \quad A)$$

$$Q17) E(X) = 1 \times P(X=1) + (-2)P(X=-2) \\ = p - 2(1 - P(X=1)) = p - 2(1-p) = 3p-2 \quad C)$$

$$Q18) X^2(\Omega) = \{1, 4\} \quad \text{et} \quad P(X^2=1) = P(X=1) = p \\ \text{et} \quad P(X^2=4) = 1 - P(X^2=1) = 1-p \quad \text{dmc} \\ E(X^2) = 1 \times p + 4 \times (1-p) = 4-3p \quad C)$$

Q19) c) car E est linéaire mais pour pouvoir dire que $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ il faudrait avoir l'hypothèse X et Y indépendantes

$$Q20) V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0 \quad \text{dmc} \quad E(X^2) \geq E(X)^2 \\ \text{dmc} \quad A) \text{ est impossible}$$