Exercice 1
Résoudre :

1. $y' = 4y + 1$
2. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$
3. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = x\cos(x^3)$ sur $\mathbb{R}_*^+$
4. $y'(x) + 2y(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_P : x \longmapsto (ax+b)e^x$

Exercice 2
Résoudre :

1. $3y' + y = 1$ avec $y(2) = 1$
2. $\dfrac{1}{2}y' + y\ln(3) = 0$ (donner les solutions sous forme de puissances de 9)
3. $y'(x) + \dfrac{1}{x+1}y(x) = x$ sur $]-1, +\infty[$
4. $(1+x)y'(x) + y(x) = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$
5. $(x^2+1)y'(x) + 2xy(x) = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 3$
6. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$ (on appliquera la méthode de variation de la constante)
7. $y' - (2x - \dfrac{1}{x})y = 1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ avec $y(1) = 1$

Exercice 3
Déterminer toutes les fonctions dérivables $y : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ telles que :

$$\forall x > 0,\ xy' + x^2y^2 + y = 0.$$

On pourra poser $z = \dfrac{1}{y}$.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ telles que :

$$y' = y\ln(y).$$

On pourra poser $z = \ln(y)$.

Exercice 5

1. Résoudre $y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que $y_1 : x \longmapsto$ est solution de $(E_1)\ :\ y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{x}$.
3. Montrer que $y_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est solution de $(E_2)\ :\ y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = -\dfrac{1}{x^3}$.
4. En déduire sans plus de calcul l'ensemble des solutions de $(E)\ :\ y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x}+3}{x^3}$

Exercice 6
Dans cet exercice, on cherche à trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P})\ :\ \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

1. Soit f une solution du problème ci-dessus (si une telle fonction existe). On considère la fonction $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$.
   (a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que g est constante, puis que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 16$.
   (c) En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle : $16f'(x) = f(x)$.
   (d) En déduire l'expression de f.
2. Finalement, quelles sont les solutions de $(\mathcal{P})$?

Exercice 7

1. Résoudre $y'' = -9y$.
2. Les problèmes suivants sont-ils des problèmes de Cauchy ? Les résoudre.
   (a) $y'' = -9y$ avec $y(0) = 1$ et $y(\pi/6) = 3$
   (b) $y'' = -9y$ avec $y(0) = 1$ et $y'(\pi/6) = -3$
   (c) $y'' = -9y$ avec $y(0) = 1$ et $y'(\pi/6) = 3$

Exercice 8

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$$

c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions deux fois dérivables $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant cette identité pour tout $x > 0$.

1. Cette équation rentre-t-elle dans le cadre du cours ?
2. *Analyse.* Considérons y une éventuelle solution de (E). On définit $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \; z(t) = y(e^t).$$

   (a) Calculer z' et z''.
   (b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.
   (c) Résoudre cette équation.
   (d) En déduire y.
3. *Synthèse.* Les fonctions trouvées précédemment sont-elles toutes solutions de l'équation différentielle (E) ? Conclure.

Exercice 9

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) : \quad xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = 0$$

c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions deux fois dérivables $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant cette identité pour tout $x > 0$.

Pour toute fonction y on considère la fonction $z : x \longmapsto xy(x)$.

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (E') que l'on déterminera.
2. Conclure.