

1) a)  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$   
 Or, d'après (P):  $f'(x)f(-x) = 1$ , mais aussi  $f'(-x)f(-(-x)) = 1$   
 c'est-à-dire  $f'(-x)f(x) = 1$ . Ainsi  $g' = 0$

b) Comme on travaille sur un intervalle  $g$  est donc constante.

Et donc  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(0) = f(0)f(-0) = (-4)^2 = 16$ .

c) Comme  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 16 \neq 0$  on a  $f(x) \neq 0$ , et on peut écrire  $f(-x) = \frac{16}{f(x)}$ . Dès lors :

$$f'(x)f(-x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) \frac{16}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{16} f(x)$$

d) Donc  $f: x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$  avec  $K \in \mathbb{R}$ .

2) Posons  $f: x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$  et vérifions si  $f$  est sol<sup>e</sup> de (P).

Déjà il faut que  $f(0) = -4 = Ke^0$  donc  $K = -4$

Puis  $f': x \mapsto -4 \times \frac{1}{16} e^{\frac{x}{16}}$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)f(-x) = -\frac{1}{4} e^{\frac{x}{16}} \times (-4 e^{-\frac{x}{16}}) = 1$$

donc le problème (P) est satisfait.

Finalement, l'unique sol<sup>e</sup> de (P) est  $f: x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ .