Questions de cours de colle de l'année 2024-2025

Voici la liste de toutes les questions de cours demandées en colle cette année. Des questions inédites sont ajoutées pour les chapitres de fin d'année sur lesquels il n'y a pas eu de colle.

0 Logique

1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, écrire des phrases avec des quantificateurs signifiant "la fonction f admet un maximum en 3" et "la fonction f admet un maximum".
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n+1$.
3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2}$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$.
4. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2,\ u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.
5. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux assertions, que sont la contraposée et la réciproque de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$?
6. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
7. Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + f_2$.

1 Nombres réels

8. Démontrer que $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.
9. Factorisez le polynôme $P(X) = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{4}X - \dfrac{3}{4}$.
10. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$.
11. Compléter et illustrer sur le graphe de la fonction $x \longmapsto x^2$ les équivalences suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$: $x^2 \geq r \iff \dots$; $x^2 \leq r \iff \dots$
12. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.
13. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{3 - x} > 0$.

2 Trigonométrie

14. Indiquer sur le cercle trigonométrique la définition géométrique du cosinus, du sinus et de la tangente, et donner l'ensemble de définition de la fonction tangente.
15. Donner le cosinus, le sinus et la tangente d'un multiple de $\pi/6$ ou de $\pi/4$ choisi par l'examinateur.
16. Donner la formule de $\cos(a+b)$ (resp. $\sin(a+b)$) et en déduire celle de $\cos(a-b)$ (resp. $\sin(a-b)$).
17. Donner la formule exprimant $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
18. Donner la définition de arccos, arcsin ou arctan.

3 Suites usuelles

19. Donner la définition d'une suite arithmétique (ou géométrique) $(u_n)_{n\geq 0}$, puis donner et démontrer la formule donnant l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n.
20. Donner l'expression de u_n en fonction de n si (u_n) est une suite arithmético-géométrique choisie par l'examinateur.
21. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ en fonction de $q \in \mathbb{R}$ et illustrer chacun des quatre cas $q > 1$, $0 < q < 1$, $-1 < q < 0$ et $q < -1$ par un schéma.
22. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 choisie par l'examinateur.

4 Études de fonctions

23. Si $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$, donner la définition de $f \circ g$. On précisera son ensemble de définition en fonction de D_f et D_g. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ pour deux fonctions f et g simples choisies par l'examinateur.
24. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de f est (strictement) (dé)croissante sur I.
25. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à la fois croissante et décroissante sur I. Démontrer que f est constante sur I.
26. *(Avec des parenthèses ad hoc...).* Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est (dé)croissante sur $\mathbb{R}$ et que g est (dé)croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \circ g$ est (dé)croissante sur $\mathbb{R}$.
27. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Donner l'équation de la tangente au graphe de f en x_0.
28. Énoncer la formule donnant la dérivée de $f \circ g$ puis l'appliquer pour démontrer une ou plusieurs formules du type : $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$, $(e^u)' = u'e^u$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, etc.
29. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est (im)paire" ou "f est T-périodique" et expliquer ce qu'on peut alors dire du graphe de f.
30. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.
31. Présenter une fonction usuelle parmi : $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, inverse, racine carrée, logarithme, exponentielle, $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, cosinus, sinus, tangente, valeur absolue.

5 Sommes et produits

32. Donner et démontrer par récurrence la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.
33. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et/ou de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.
34. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $(b_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$) et soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq p,\ \exp\left(\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \displaystyle\prod_{k=p}^{n} \exp(a_k)$ (resp. que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \ln(b_k) = \ln\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right)$).

35. En utilisant la valeur de $\sum_{k=0}^{m} q^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $p \leq n$. *(via un "découpage")*
36. Pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$ en effectuant un téléscopage sur $(1-q)S$.
37. Soit $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Déterminer la valeur de S en effectuant le retournement $j = n - k$.
38. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer et démontrer une formule parmi : formule de symétrie, formule d'absorption, formule de Pascal.
39. Énoncer la formule du binôme de Newton.
40. À l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal, développer rapidement $(1+x)^5$ et $(x-1)^5$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou des quantités similaires choisies par l'examinateur).
41. Calculer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$.
42. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ calculer $\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.

6 Polynômes

43. Donner la définition du degré d'un polynôme et énoncer la formule donnant le degré d'un produit.
44. Énoncer le théorème faisant le lien entre racine d'un polynôme et factorisation (on précisera les définitions de "racine" et de "divise").
45. Factoriser un polynôme de degré 3 ou 4 en utilisant une ou des racines évidentes.

7 Nombres complexes

46. Résoudre sur $\mathbb{C}$ une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels choisie par l'examinateur.
47. Donner la définition du conjugué $\overline{z}$ de $z \in \mathbb{C}$ puis démontrer que : $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, puis encore que : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
48. Si $z \in \mathbb{C}$, donner la définition de $\overline{z}$ et de $|z|$. Si M est un point du plan d'affixe z, comment construire le point M' d'affixe $\overline{z}$? à quoi correspond géométriquement $|z|$?
49. Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe z simple choisi par l'examinateur et illustrer le résultat en plaçant le point M d'affixe z sur un schéma.
50. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n où (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas $\Delta < 0$) choisie par l'examinateur.
51. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$.
52. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 = w$ où $w \in \mathbb{C}$ est une constante choisie par l'examinateur. *On précisera aux élèves si on souhaite qu'ils cherchent z sous forme algébrique ou polaire.*

53. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
54. Pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{2p\pi,\ p \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$ déterminer la valeur de $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

8 Ensembles

55. Soient les ensembles $E = \{(t, 4t-1),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$. Montrer que $E = F$.
56. Soient les ensembles $A = \{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ *(attention, ici il y a deux questions en une)*. On considérera l'élément $(-1, 0)$.
57. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.
58. Soit $K = \{(0,1), (1,0)\}$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telle que $K = A \times B$.
59. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Donner la définition de "A est majorée" ou de "M est un maajorant de A" ou de "s est la borne supérieure de A" ou des assertions similaires pour minorée/minorant/borne inférieure.

9 Systèmes linéaires

60. Savoir résoudre un système linéaire à n équations et p inconnues pour $n, p \in \{2, 3, 4\}$.

10 Suites réelles

61. Donner la définition avec des quantificateurs de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou de : (u_n) tend vers $+\infty$, ou de : (u_n) tend vers $-\infty$ et savoir l'expliquer sur un dessin.
62. Énoncer un des théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (cas limite finie et limite infinie), théorème d'encadrement, théorème des suites adjacentes, théorème de comparaison.
63. Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que (u_n) converge.

    On utilisera que $\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
64. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la suite (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.
65. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{u_n}$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$. *On montrera que (u_n) est croissante et ne peut pas converger.*

66. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites non nulles à partir d'un certain rang, donner la définition de $u_n \sim v_n$. Énoncer ensuite un ou plusieurs des équivalents usuels (valables si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) parmi :

- si $\alpha \neq 0$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$

67. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
68. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction croissante et soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que si $u_1 \geq u_0$ alors (u_n) est croissante.

11 Applications

69. Soit $f : E \longrightarrow F$. Donner la définition de "f est injective" et de "f est surjective".
70. Donner un exemple de fonction qui soit à la fois (non) surjective et (non) injective *(avec des parenthèses choisies par l'examinateur).*
71. Tracer le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(2) = 1$, 1 est un antécédant de 3 par f et 4 n'a pas d'antécédant par f *(ou toutes autres conditions similaires choisies par l'examinateur).*
72. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y, x-y)$ est une bijection et déterminer f^{-1} *(sur cet exemple ou tout autre exemple simple choisi par l'examinateur et où les ensembles de départ et d'arrivée sont donnés).*

12 Matrices

73. Donner la définition du produit matriciel.
74. Quand dit-on qu'une matrice est inversible ? Démontrer ensuite que $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
75. Démontrer que si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
76. Énoncer le théorème donnant l'inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'appliquer sur un exemple choisi par l'examinateur.
77. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ alors $(AB)C = A(BC)$.
78. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices *(à l'attention des élèves : attention, citer les hypothèses adéquates est également un attendu de cette question).*
79. Démontrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a $(AB)^T = B^T A^T$.

13 Dénombrement

80. Énoncer la formule donnant le cardinal d'une union de 2 ensembles finis.

81. Énoncer la formule donnant le cardinal du complémentaire d'un ensemble fini.
82. Donner la définition d'une partition d'un ensemble. Quelle formule sur les cardinaux a-t-on dans ce cas ?
83. En utilisant la formule pour le cardinal d'une union de deux ensembles et la distributivité de l'union et l'intersection (cf exo 1 TD 13), montrer que pour trois ensembles finis E, F, G :

$$\begin{aligned} Card(E \cup F \cup G) = {} & Card(E) + Card(F) + Card(G) \\ & - Card(E \cap F) - Card(F \cap G) - Card(E \cap G) + Card(E \cap F \cap G). \end{aligned}$$

84. Si $Card(E) = n$ que vaut $Card(\mathcal{P}(E))$? Démontrer cette formule en paritionnant $\mathcal{P}(E)$ selon le nombre d'éléments des sous-ensembles de E.
85. Déterminer le nombre d'anagrammes d'un mot choisi par l'examinateur. *Les élèves ne doivent pas simplement appliquer une formule toute faite, mais expliquer la manière de compter.*

14 Probabilités

86. Donner la définition d'un système complet d'évènements d'un espace probabilisé. Quelle formule sur les les probabilités a-t-on dans ce cas ?
87. Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini.
88. Donner et démontrer la formule donnant $\mathbb{P}(\overline{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.
89. Démontrer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
90. Donner la définition de "A et B sont deux évènements indépendants", puis démontrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B (ou, au choix de l'examinateur, A et $\overline{B}$) le sont aussi.

15 Limites de fonctions

91. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $I \subset \mathbb{R}$. Donner une des neuf définitions avec des quantificateurs de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ pour un choix de $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fait par l'examinateur.
92. Montrer que la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.
93. Énoncer un ou plusieurs des équivalents usuels pour les fonctions.

16 Continuité

94. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Donner la définition de : "f est continue en x_0". Illustrer cette définition par les graphes d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en x_0.
95. Soit $I \subset \mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue et soit (u_n) une suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

96. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$ (ou de toute autre fonction relativement simple choisie par l'examinateur) puis justifier que f est continue sur cet ensemble.
97. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et l'expliquer sur un dessin.
98. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.

17 Espaces vectoriels

99. Montrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ décrit par une équation cartésienne ou par paramètres est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. *L'examinateur choisira l'ensemble F et la valeur de $n \in \{2, 3, 4\}$.*
100. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
101. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $u_1, \ldots, u_n \in E$. Donner la définition de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
102. Donner la définition d'une famille libre.
103. Montrer que si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ on a : $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n \implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i$.
104. Donner la définition d'une base et de la dimension d'un sous-espace vectoriel.

18 Géométrie

105. Donner la définition du déterminant de deux vecteurs u et v du plan exprimés dans la base canonique. Compléter ensuite la propriété suivante : $\det(u, v) \neq 0 \iff$ la famille (u, v) est ...
106. En utilisant les propriétés du produit scalaire, démontrer que pour tous vecteurs u, v on a : $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\, u \,.\, v + ||v||^2$.
107. Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore en utilisant la question de cours précédente.
108. Donner la définition d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'une famille de vecteurs choisie par l'examinateur est une telle base.
109. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne d'une droite du plan dont l'examinateur donne la représentation graphique.

19 Applications linéaires

110. Savoir montrer qu'une application simple est linéaire.

111. Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Laquelle des composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existe ? Préciser son ensemble de départ et d'arrivée, puis montrer que c'est une application linéaire.
112. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $Ker(f)$ et démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
113. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $Ker(f)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $Ker(f)$ pour que f soit injective.
114. Donner la définition du rang d'une application linéaire puis énoncer le théorème du rang.

20 Dérivation

115. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions de "f est continue en x_0" et de "f est dérivable en x_0". Quelle notion implique l'autre ?
116. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, donner l'équation de la tangente en x_0 au graphe de f. Appliquez cette formule dans le cas d'une fonction f choisie par l'examinateur.
117. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable sur I. Énoncer le théorème donnant à quelle condition f^{-1} est dérivable en $y \in J$ et donner la formule exprimant $(f^{-1})'(y)$.
118. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I".
119. Déterminer la dérivée n-ème de $f : x \longmapsto e^{2x}$.
120. Énoncer le théorème de Rolle et l'illustrer sur un dessin.
121. Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer sur un dessin.

21 Variables aléatoires

122. On admet la linéarité de $\mathbb{E}$ et que si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Démontrer que si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.
123. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (ou une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ou une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$) ? Donner ensuite la formule de son espérance et de sa variance (sauf pour la loi uniforme).
124. Soit $A \subset \Omega$, donner la définition de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ et préciser sa loi.
125. Quand dit-on qu'une variable aléatoire est centrée (et/ou réduite) ? Démontrer que si X est une variable aléatoire finie alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée (et/ou $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée-réduite).
126. Qu'est-ce que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ? Tracer le graphe de cette fonction dans le cas où X suit une loi usuelle simple choisie par l'examinateur.
127. Donner la défintion de la variance d'une variable aléatoire, puis énoncer et démontrer la formule de König-Huygens.
128. Quand dit-on que 2 variables aléatoires réelles finies X et Y sont indépendantes ?
129. On admet que si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

22 Intégration

130. Savoir calculer des primitives des fonctions usuelles.
131. Énoncer et démontrer le résultat appelé : "positivité de l'intégrale".
132. Donner la définition des sommes de Riemann d'une fonction f définie sur $[0, 1]$. Que peut-on dire de ces sommes ?
133. Énoncer le théorème d'intégrations par parties.
134. Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ grâce à une intégrations par parties.
135. Savoir faire un changement de variables simple.

23 Équations différentielles linéaires

136. Énoncer le principe de superposition pour les équations différentielles du 1er ordre du type $y' + a(x)y = f(x)$.
137. Résoudre une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients et second membre constants choisie par l'examinateur, avec ou sans condition initiale.
138. Résoudre une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients et second membre constants choisie par l'examinateur, avec ou sans condition initiale.

24 Fonctions de deux variables

139. Donner la définition des applications partielles d'une fonction $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$.
140. Donner la définition du gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Calculer le gradient d'une fonction de deux variables choisie par l'examinateur.
141. Énoncer le théorème de Schwarz et le vérifier sur un exemple choisi par l'examinateur.
142. Donner la définition d'un point critique d'une fonction de deux variables. Énoncer un théorème faisant le lien entre point critique et extremum local.

25 Python

143. Écrire une fonction Python prenant en arguments deux réels x et y et renvoyant le réel $\dfrac{x^2}{2y} + \sqrt{x+1}$.
144. Écrire une fonction Python `valabs` prenant en argument un réel x et renvoyant $|x|$.
145. Écrire une fonction Python f prenant en argument un réel x et renvoyant $f(x)$ défini par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x-1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

146. Écrire une fonction Python `somme` (resp. `produit`) prenant en argument un entier n et renvoyant $\sum_{k=5}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$ (resp. $\prod_{k=2}^{n} \frac{1+k}{2}$) ou de toute autre somme ou produit simple choisi par l'examinateur.
147. Écrire une fonction Python `suite` prenant en argument un entier n et renvoyant u_n où la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n = f(u_{n-1})$, $u_{n+1} = f(u_n, n)$ ou $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$.
148. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$. On <u>admet</u> que (u_n) est décroissante et tend vers 0. Écrire une fonction Python `seuil` prenant en argument $\varepsilon > 0$ et renvoyant la plus grande valeur de u_n telle que $u_n < \varepsilon$.
149. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et renvoyant la liste `[`u_0`,`u_1`,`u_2`,`$\ldots$`,`u_n`]` où (u_n) est une suite de réels choisie par l'examinateur du type $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n, n)$.
150. Écrire une fonction Python `minimum` prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant le minimum de cette liste. *On admettra que le premier élément d'une liste* `L` *est donné par* `L[0]`.
151. Rappeler la définition de la moyenne et de l'écart type d'une série $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels. Écrire deux fonctions Python prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant respectivement leur moyenne et leur écart-type *(cf TP 9)*.
152. Écrire un programme Python permettant de tracer le graphe d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ choisie par l'examinateur.
153. Écrire un programme Python permettant de tracer u_n en fonction de n où (u_n) est une suite définie par récurrence choisie par l'examinateur.
154. Écrire une fonction Python prenant en argument une liste `L = [`x_0`,`x_1`,`$\ldots$`,`x_{n-1}`]` et renvoyant $\sum_{k=0}^{n-1} x_k 2^k$
155. Écrire une fonction Python `recherche` prenant en argument une liste L et un élément de type quelconque `a` et renvoyant l'indice de la première occurence de `a` dans la liste `L`. La fonction renverra `"introuvable"` si `a` n'est pas un élément de `L`.
156. On décrit un brin d'ADN par une liste dont les éléments sont toujours un des quatre caractères `"A"`, `"T"`, `"C"` et `"G"`. Le début d'un message génétique est généralement signalé par le codon `"A","T","G"`. Écrire une fonction `depart` qui prend en argument un brin d'ADN et renvoie l'indice du début du message génétique.
Par exemple, `depart(["C","G","A","A","T","C","A","T","G","G","T","A"])` doit renvoyer `6`.
La fonction renverra un message d'erreur si le codon de départ n'est pas présent dans le message génétique considéré.
157. Écrire une fonction Python `transforme` prenant en argument une liste et la renvoyant après avoir transformé tous les 4 qu'elle contient en des 5.
158. Écrire une fonction Python `miroir` prenant en argument une liste et renvoyant la liste inversée. Par exemple `miroir([1,2,3])` doit renvoyer `[3,2,1]`. *Le colleur pourra imposer, ou non, que la liste prise en argument ne soit pas modifiée par l'exécution de la fonction.*

159. Écrire une fonction Python `produitmat` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant leur produit matriciel. Votre fonction devra gérer le cas où les tailles des matrices A et B ne sont pas compatibles.
160. Écrire une fonction Python `transpose` prenant en argument une matrice A et renvoyant sa transposée.
161. Écrire une fonction Python `tri` réalisant le tri d'une liste de nombres selon (au choix de l'examinateur) l'algorithme du tri par sélection ou du tri par insertion. Vous illustrerez les différentes étapes de l'algorithme sur une liste simple de votre choix.
162. Écrire une fonction `compte` prenant en argument une chaîne de caractères `texte` et un caractère `lettre` et renvoyant le nombre de fois que `lettre` apparaît dans `texte`.
163. Écrire une fonction Python `alea` ne prenant rien en argument et renvoyant `"a"` avec probabilité $0,2$, `"b"` avec probabilité $0,35$, et `"c"` avec probabilité $0,45$.
164. Écrire un programme Python simulant une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. En déduire un code permettant d'estimer la valeur de l'espérance et de la variance de cette loi.
165. Écrire un code Python permettant d'estimer une probabilité, une espérance ou une variance.
166. Écrire un code Python permettant d'approcher la valeur de $\int_a^b f$ pour une fonction f donnée (grâce à une somme de Riemann).