

Rentrée 2025-2026

BCPST 1B Marcelin Berthelot

M. Caillaud, mathématiques et informatique
corentin.caillaud@ens-rennes.fr

Rentrée 2025-2026

BCPST 1B Marcelin Berthelot

M. Caillaud, mathématiques et informatique
corentin.caillaud@ens-rennes.fr

1. Appel inversé
2. Attendus en math dans le supérieur
3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B
4. Évaluations

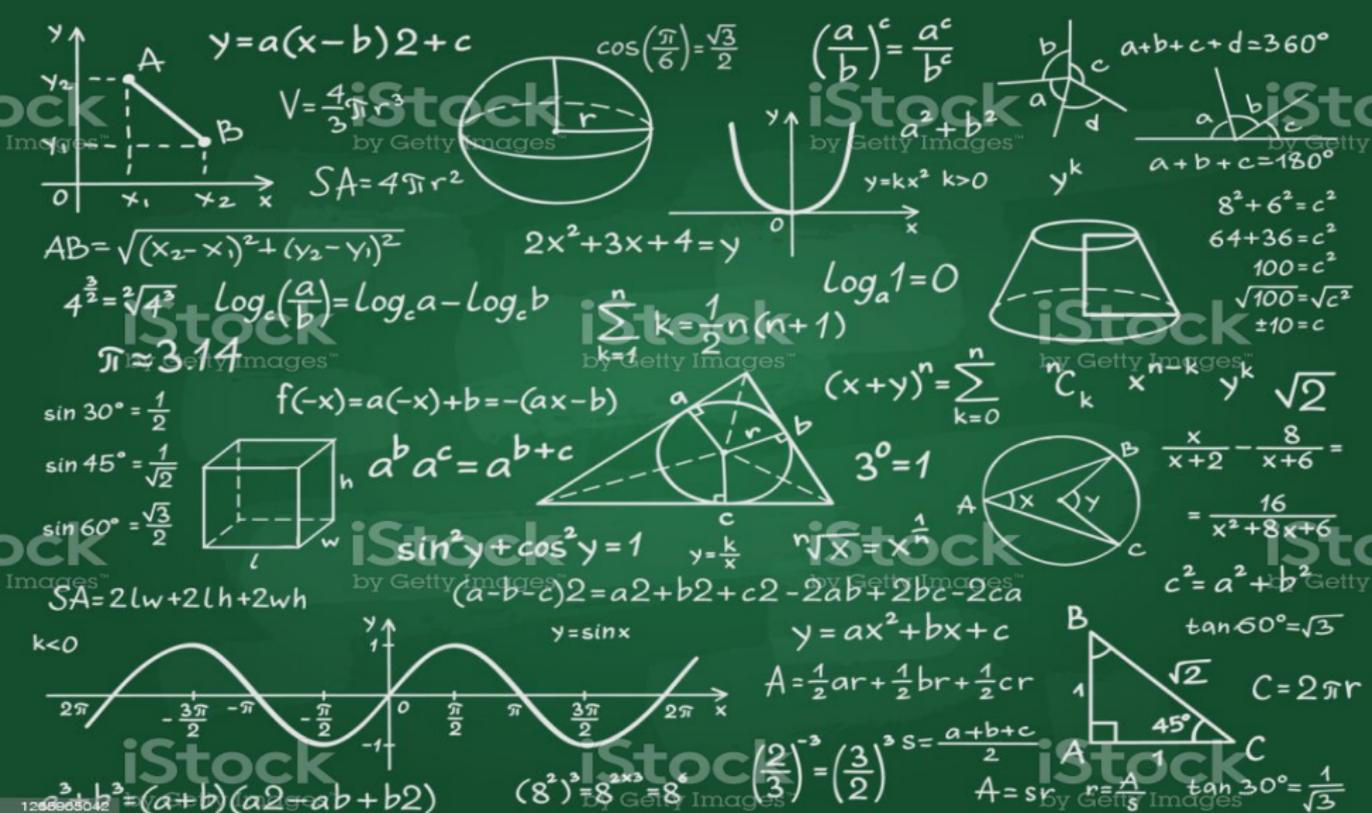
1. Appel inversé

Nom, Initiale, Prénom
J'ai passé mon grand oral sur...

1. Appel inversé

Nom, Initiale, Prénom
J'ai passé mon grand oral sur...

Caillaud, C, Corentin
~~*J'ai passé mon grand oral sur...*~~ *J'ai fait ma thèse sur
de l'optimisation mathématique i.e. la recherche de
minimum / maximum de fonctions.*



Une image obtenue en recherchant "maths" dans Google

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.



HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentioibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgis tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc autem librum ideo seorsum edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmetice thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum expositio. Lectores incitaretur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

HIERONYMI CARDANI

relinquitur prima 6 m: re 30 q, hæc autem quantitates proportionales sunt, & quadratum secundæ est æquale duplo producti secundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

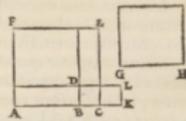
De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.



Cipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Maria Florido Veneto, qui cum in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando uenisset, occasione dedit, ut Nicolaus inuenit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, super pressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quaesiuimus, eamque in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiicimus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli causa cubus gh & sexcuplum lateris gh æquale 20, & ponam duos cubos ae & cl , quorum differentia sit 20, ita quod productum a c lateris, in c k latus, sit 2, tertia felicitè numeri rerum pars, & abscondam cb , æqualem c k , dico, quod si ita fuerit, lineam ab residuum, esse æqualem gh , & ideo rei æstimationem, nam de gh iam supponebatur, quod ita esset, perficiam igitur per modum primi suppositi 6^o capituli huius libri, corpora da , d c , d e d f , ut per d c intelligamus cubum b c , per d f cubum ab , per d a triplum cb in quadratum ab , per d e triplum ab in quadratum bc , quia igitur ex ac in ck fit 2, ex ac in ck ter, sicut 6 numerus rerum, igitur ex ab in triplum ac in ck sunt 6 res ab , seu sexcuplum ab , quare triplum producti ex ab , b c , a c , est sexcuplum ab , at uero differentia cubi ac , à cubo ck , & existenti à cubo b c æquale ex supposito, est 20, & ex supposito primo 6^o capituli, est aggregatum corporum da , d e , d f , tria igitur hæc corpora sunt 20, posita uero b c m : cubus ab , æqualis est cubo a c , & triplo a c in quadratum cb , & cubo b c m : & triplo b c in quadratum a c m : per demonstrata illic, differentia autem tripli b c in quadratum a c , à triplo a c in quadratum b c est productum ab , b c , a c , quare cum hoc, ut demonstratum est, æquale sit sexcuplo ab , igitur addito sexcuplo ab , ad id quod fit ex ac in quadratum b c ter, fiet triplum b c in quadratum a c , cum igitur b c fit m : iam ostensum est, quod productum cb



Un extrait de *Ars Magna* de Cardan, XVIème siècle

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux, la base de l'un sera égale à la base de l'autre; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entr'eux.

Soient les deux triangles ABC, DEF (fig. 4) dont les deux côtés AB, AC sont égaux aux deux côtés DE, DF chacun à chacun, c'est-à-dire, le côté AB égal au côté DE, et le côté AC au côté DF; que l'angle BAC soit aussi égal à l'angle EDF: je dis que la base BC est égale à la base EF, que le triangle ABC est égal au triangle DEF, et que les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux chacun à chacun; l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Car si le triangle ABC est appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, la droite AB sur la droite DE, le point B tom-

bera sur le point E, parce que la droite AB est égale à la droite DE: mais la droite AB s'appliquant exactement sur la droite DE, la droite AC s'appliquera de même exactement sur la droite DF, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF; le point C tombera sur le point F, parce que la ligne AC est égale à la ligne DF; mais le point B tombe sur le point E: donc la base BC est égale à la base EF, car si le point B tombant sur le point E, et le point C sur le point F, la base BC ne s'applique pas exactement sur la base EF, il faut nécessairement que deux lignes droites comprennent un espace, ce qui est impossible (axiome 12); donc la base BC s'appliquera exactement sur la base EF, et lui sera égale; donc aussi le triangle entier ABC s'appliquera exactement sur le triangle entier DEF et lui sera égal. Par conséquent les autres angles de l'un des triangles s'appliqueront exactement sur les autres angles de l'autre triangle et seront par conséquent égaux aussi entr'eux; c'est-à-dire l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Donc si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux, la

base de l'un sera égale à la base de l'autre; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux des deux triangles seront aussi égaux entr'eux; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Dans les triangles isocèles les angles placés sur la base sont égaux entr'eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles placés au-dessous de la base seront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle isocèle ABC (fig. 5) dont le côté AB est égal au côté AC; prolongez les droites AB, AC, vers D et vers E (dem. 2): je dis que l'angle ABC est égal à l'angle ACB et que l'angle CBD est encore égal à l'angle BCE.

Car prenons sur la droite BD un point quelconque F, et de la droite AE retranchons la droite AG égale à la droite AF, qui est plus petite que la droite AE (prop. 3), et conduisons les droites FC et GB.

Puisque la droite AF est égale à la droite AG et la droite AB à la droite AC, les deux droites FA, CA seront égales aux deux droites GA, BA chacune à chacune; mais ces droites compren-

Torsion invariants of complexes of groups

Boris Okun Kevin Schreve

August 23, 2021

Abstract

Suppose a residually finite group G acts cocompactly on a contractible complex with strict fundamental domain Q , where the stabilizers are either trivial or have normal \mathbb{Z} -subgroups. Let ∂Q be the subcomplex of Q with nontrivial stabilizers. Our main result is a computation of the homology torsion growth of a chain of finite index normal subgroups of G . We show that independent of the chain, the normalized torsion limits to the torsion of ∂Q , shifted a degree. Under milder assumptions of acyclicity of nontrivial stabilizers, we show similar formulas for the mod p -homology growth. We also obtain formulas for the universal and the usual L^2 -torsion of G in terms of the torsion of stabilizers and topology of ∂Q . In particular, we get complete answers for right-angled Artin groups, which shows they satisfy a torsion analogue of Lück approximation theorem.

1 Introduction

Let G be a residually finite group of type F , and let $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ be a nested chain of finite index, normal subgroups of G with $\bigcap_k \Gamma_k = 1$. In this paper, we are interested in the normalized growth of the invariants:

$$\limsup_k \frac{b_i(B\Gamma_k; \mathbb{Q})}{[G : \Gamma_k]}, \quad \limsup_k \frac{b_i(B\Gamma_k; \mathbb{F}_p)}{[G : \Gamma_k]}, \quad \limsup_k \frac{\log(|H_i(\Gamma_k; \mathbb{Z})_{\text{tors}}|)}{[G : \Gamma_k]}.$$

These will be denoted by $b_i^{(2)}(G, \mathbb{Q})$, $b_i^{(2)}(G, \mathbb{F}_p)$ and $t_i^{(2)}(G)$ respectively. By Lück's approximation theorem, the first quantity coincides with the i^{th} L^2 -Betti number of G [25]. We will call the second quantity the i^{th} \mathbb{F}_p - L^2 -Betti number of G , and the third the i^{th} torsion growth of G . The first quantity is an honest limit and does not depend on the choice of

Theorem 1.1. *Let G be a residually finite group which acts cocompactly on a contractible complex with strict fundamental domain Q . Suppose the stabilizer of any cell fixes it, and that each nontrivial stabilizer has a normal, infinite cyclic subgroup with type F quotient. Let ∂Q be the subcomplex of Q with nontrivial stabilizers. Then*

$$t_i^{(2)}(G) = \log |H_{i-1}(\partial Q)_{\text{tors}}|.$$

As with the computation in [3], the lim sup is an honest limit and is independent of the chain. Our main class of groups which satisfy the assumptions in Theorem 1.1 are residually finite Artin groups which satisfy the $K(\pi, 1)$ -conjecture. Such Artin groups act on a contractible complex called the Deligne complex [7, Section 1.5] with strict fundamental domain isomorphic to the cone on the nerve L of the Artin group A . The stabilizers of simplices are either trivial or isomorphic to spherical Artin groups, which have normal infinite cyclic subgroups. The simplices in L correspond to simplices in the Deligne complex with nontrivial stabilizer. Therefore, we have that $t_i^{(2)}(A) = \log |H_{i-1}(L)_{\text{tors}}|$. A general construction of actions with strict fundamental domain comes from simple complexes of groups, as in [4, Chapter II.12].

Our proof of Theorem 1.1 uses the recent work of Abert, Bergeron, Fraczyk, and Gaboriau in [1]. They developed a general strategy for showing the vanishing of $t_i^{(2)}(G)$ for groups which act on contractible complexes with “cheap” infinite stabilizers. Here, “cheap” roughly means that finite index subgroups admit classifying spaces with sublinear (in the index) number of cells and subexponential norm of boundary maps, see Section 10 of [1]. By using an effective version of Geoghegan's rebuilding procedure for the Borel construction [15, Section 6.1], they build classifying spaces for finite index subgroups of G by gluing together these nice classifying spaces of the stabilizers, and show the resulting spaces have subexponential torsion growth. In Section 2, we describe an alternative approach to this effective rebuilding procedure using iterated mapping cylinders, which we find simpler. Amongst other examples, they showed the vanishing of $t_i^{(2)}(A)$ for Artin groups with $(i-1)$ -connected nerve. A new feature in this paper is an exact calculation of nonvanishing torsion growth.

Our argument has two parts. The first part is handled by the method in [1]. Given a group G as in Theorem 1.1, we construct a classifying space BG built out of classifying spaces of the stabilizers BG^σ . There is a subcomplex Y which is built from BG^σ for σ in ∂Q , and $BG = Q \cup_{\partial Q} Y$. Since groups with normal infinite cyclic subgroups and type F quotient are cheap, the lifts Y_k of Y to the finite cover $B\Gamma_k$ have subexponential torsion growth.

Un article de mathématiques de 2021

Lemma 2.3. *There is a constant $C = C(M, n)$ such that if*

$$\|g_i\|, \|g'_i\|, \|\gamma_i\|, \|\partial_{F'_i}\| < K,$$

and $K > 2$ then

$$\|H\|, \|H'\|, \|\Sigma\|, \|\partial_{X'}\| < CK^C.$$

Now let $\widehat{X} \rightarrow X$ be a cover of X . The cylindrical filtration on X induces a natural cylindrical filtration on \widehat{X} , where $(\widehat{F}_i, \widehat{E}_i)$ is the preimage of the pair (F_i, E_i) , and \widehat{f}_i is the lift of f_i .

Lemma 2.4. *The norm of \widehat{f}_i is uniformly bounded, independent of the cover.*

Proof. On the level of the universal cover the attaching map is described by a matrix with $\mathbb{Z}\pi_1$ coefficients. The uniform bound for $\|\widehat{f}_i\|$ in terms of this matrix is given by [25, Lemma 2.5]. \square

To summarize, given a cylindrical filtration on X , the norm of the rebuilt maps of any rebuilding of a finite cover of X is bounded by a fixed polynomial of the maximal norm of the rebuilding maps.

Any filtration of X by subcomplexes leads to a cylindrical filtration by taking pairs (F_i, E_i) to be $(X_i - N(X_{i-1}), \partial N(X_{i-1}))$, where $N(X_{i-1})$ is a regular neighborhood of X_{i-1} in X_i . A particularly easy case is a filtration of X by its skeleta $X^{(i)}$, then we can take (F_i, E_i) to be $\sqcup(\sigma^i, \partial\sigma^i)$ with the standard attaching maps.

This generalizes, up to homotopy, to complexes which are filtered as iterated adjunction spaces. It is easy to change such filtration into a cylindrical filtration and keep the same pairs (F, E) at the cost of changing the attaching maps.

The maps $g|_E \times \text{id} : E \times I \rightarrow E' \times I$, $g : F \rightarrow F'$, and $h : X \rightarrow X'$ induce a map between mapping cylinders:

$$g \cup h : F \cup_E M(fg'g) \rightarrow F' \cup_{E'} M(f')$$

By [15, Theorem 4.1.5], $g \cup h$ is a homotopy equivalence. Since $g'g$ is homotopic to the identity via γ , $F \cup_E M(f)$ is homotopy equivalent to $F \cup_E M(fg'g)$. The homotopy equivalence

$$\Phi : F \cup_E M(f) \rightarrow F \cup_E M(fg'g)$$

is given by

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} (x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(\gamma(x, 2(1-t))) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

on the $E \times I$, and the identity maps on F and X .

The composition of these homotopy equivalences gives a homotopy equivalence

$$H : F \cup_E M(f) \xrightarrow{\Phi} F \cup_E M(fg'g) \xrightarrow{g \cup h} F' \cup_{E'} M(f').$$

To estimate its norm, we use splittings of the chain complexes of $F' \cup_{E'} M(f')$ and $F \cup_E M(fg'g)$, similar to Lemma 2.1. The map on chains induced by $g \cup h$ is block diagonal $g \cup h = g \oplus g_E \oplus h$. The matrix of Φ has block form:

$$\begin{pmatrix} \text{id} & 0 & 0 \\ 0 & \text{id} & 0 \\ 0 & -f\gamma & \text{id} \end{pmatrix}$$

Thus, $H = (g \cup h)\Phi$ has matrix:

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g_E & 0 \\ 0 & -hf\gamma & h \end{pmatrix}$$

and the claim follows.

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- ▶ *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- ▶ *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- ▶ *Modéliser, représenter*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- ▶ *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- ▶ *Modéliser, représenter*
- ▶ *Raisonner et argumenter*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- ▶ *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- ▶ *Modéliser, représenter*
- ▶ *Raisonner et argumenter*
- ▶ *Communiquer à l'écrit et à l'oral*

2. Attendus en math dans le supérieur

Extrait du programme officiel de BCPST 1 :

L'enseignement des mathématiques en BCPST vise les compétences suivantes :

- ▶ *S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies*
- ▶ *Modéliser, représenter*
- ▶ *Raisonner et argumenter*
- ▶ *Communiquer à l'écrit et à l'oral*
- ▶ *Calculer, manipuler des symboles et maîtriser le formalisme mathématique*

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle...
mais :

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle...
mais :

- ▶ maîtrise indispensable du calcul : calculatrice interdite en math, “cahier de calcul” (lien sur cahier de prépa), interros de calcul

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle...
mais :

- ▶ maîtrise indispensable du calcul : calculatrice interdite en math, “cahier de calcul” (lien sur cahier de prépa), interros de calcul
- ▶ pour faire le lien avec le lycée, certains “exercices types” à savoir refaire

2. Attendus en math dans le supérieur

Importance de la démarche scientifique personnelle...
mais :

- ▶ maîtrise indispensable du calcul : calculatrice interdite en math, “cahier de calcul” (lien sur cahier de prépa), interros de calcul
- ▶ pour faire le lien avec le lycée, certains “exercices types” à savoir refaire

maîtrise du cours > refaire des exos de TD

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- ▶ je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- ▶ je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)
- ▶ si je ne sais pas faire un exo : la réponse est dans le cours, je dois le revoir

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- ▶ je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)
- ▶ si je ne sais pas faire un exo : la réponse est dans le cours, je dois le revoir
- ▶ je note les points qui me posent problème pour pouvoir poser la question au cours suivant

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.1. À la maison :

- ▶ je travaille entre chaque séance (apprendre cours + exos demandés)
- ▶ si je ne sais pas faire un exo : la réponse est dans le cours, je dois le revoir
- ▶ je note les points qui me posent problème pour pouvoir poser la question au cours suivant
- ▶ je travaille en groupe

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

- ▶ je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

- ▶ je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi
- ▶ en TD, je travaille en groupe

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

- ▶ je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi
- ▶ en TD, je travaille en groupe
- ▶ j'ai une feuille de brouillon pour les "pauses exos" du cours, ou pour noter des questions à poser

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.2. En classe :

- ▶ je suis volontaire pour passer au tableau corriger un exo, même si je n'ai pas tout réussi
- ▶ en TD, je travaille en groupe
- ▶ j'ai une feuille de brouillon pour les "pauses exos" du cours, ou pour noter des questions à poser

je suis **ACTIF** en cours : je participe à l'oral, je comprends "en live" ou alors je pose une question.
Élèves impliqués en cours = réussite du groupe !

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.3. Matériel :

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.3. Matériel :

- ▶ Séparez impérativement cours et TD.

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.3. Matériel :

- ▶ Séparez impérativement cours et TD.
- ▶ Privilégiez un cahier pour le cours si vous êtes peu organisé.

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.3. Matériel :

- ▶ Séparez impérativement cours et TD.
- ▶ Privilégiez un cahier pour le cours si vous êtes peu organisé.
- ▶ Les exercices de TD traités à la maison doivent être écrits **sur feuille libre** (exercices ramassés certaines séances).

3. Contrat de fonctionnement en BCPST 1B

3.3. Matériel :

- ▶ Séparez impérativement cours et TD.
- ▶ Privilégiez un cahier pour le cours si vous êtes peu organisé.
- ▶ Les exercices de TD traités à la maison doivent être écrits **sur feuille libre** (exercices ramassés certaines séances).
- ▶ **Téléphone interdit en classe (même pour regarder la feuille de TD en ligne).**

4. Évaluations

4. Évaluations

- ▶ DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h

4. Évaluations

- ▶ DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- ▶ Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**

4. Évaluations

- ▶ DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- ▶ Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**
- ▶ Colles toutes les 2 semaines (à partir du 22/09/25)

4. Évaluations

- ▶ DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- ▶ Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**
- ▶ Colles toutes les 2 semaines (à partir du 22/09/25)
- ▶ DM et exercices en temps libre (ne compte pas dans la moyenne)

4. Évaluations

- ▶ DS environ toutes les 3 semaines (*cf* feuille de consignes DS), durée typique : 3h
- ▶ Interros de cours rapides **tous les lundis à 8h**
- ▶ Colles toutes les 2 semaines (à partir du 22/09/25)
- ▶ DM et exercices en temps libre (ne compte pas dans la moyenne)
- ▶ Points bonus de participation, de retours de colle, de préparation des interros, etc. Par séquences, précisions à venir.