Mathématiques - mercredi 18 septembre 2024
Devoir n°1 Durée : 2 h

- Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.
- Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.
- Le sujet comporte 2 pages et 5 exercices.

Exercice 1. *Nous n'avons pas encore traité ce point en 2025-2026 donc il ne pourra pas y avoir cette question le jour du DS. Il y aura en revanche une question de cours similaire.*

1. Énoncer l'inégalité triangulaire.
2. La démontrer.

Exercice 2.

1. (a) Écrire une fonction Python `fun` prenant en arguments, dans cet ordre, deux réels x et y et renvoyant la valeur de $\frac{x^2 + 2}{2\sqrt{y}}$.
- (b) Que renvoie `fun(2, 5)` ? On écrira le résultat sous forme simplifiée.
2. On définit la fonction `mystere` suivante :

```
1 def mystere(a,b):
2     x = a + b / 2
3     y = 2 * x + a
4     return y/x
```

- (a) En détaillant les étapes, expliquer ce que renvoie `mystere(1, 4)`.
- (b) De manière générale, écrire en fonction de a et de b ce que renvoie `mystere(a, b)`. On écrira le résultat sous forme simplifiée.

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes. *On ne demande pas de préciser pour quelles valeurs de x elles ont un sens.*

1) $\frac{\frac{4}{9}}{6}$

2) $\frac{10}{\frac{15}{6}}$

3) $(x + 1) \times \frac{x}{1 + \frac{1}{x}}$

4) $2 - \frac{1 - x}{x - 2}$

5) $x\sqrt{x} \times \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right)^2$

Exercice 4. Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = 2x + \frac{1}{4}$

2) $-2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \leq 0$

3) $|3 - x| = 6$

4) $(1 - 2x)^2 \geq 16$

5) $\sqrt{4 - x^2} < 1$

6) $\frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{x + 6}{x + 4}$

7) $\frac{x}{x - 2} > \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

8) $\frac{6}{2 - \frac{x}{x-1}} = (x - 1)^2$

Exercice 5.

1. Déterminer les solutions de l'équation $(E_1) : x^2 - 4x + 3 = 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation $(E_2) : x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(x - 1)^4 - 4(x - 1)^2 + 3 = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$.
(b) En déduire les solutions de l'équation $(E_3) : x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$.
4. En utilisant la question 3.(b), déterminer pour finir les solutions de l'équation suivante $(E_4) : 1 - 4x + 2x^2 + 4x^3 = 0$.

Fin du sujet.