

DS 1 - Corrigé

Exercice 1 : voir cours

Exercice 2 :

1) a) $\text{def fun}(x, y):$
 $a = x * 2 + 2$
 $b = 2 * y * (1/2)$
 return a/b

b) $\text{fun}(2, 5)$ renvoie

$$\frac{2^2 + 2}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

2) a) Quand on demande $\text{mystere}(1, 4)$, Python calcule
 $x = 1 + \frac{4}{2} = 3$ puis $y = 2 \times x + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$
puis renvoie $\frac{y}{x} = \boxed{\frac{7}{3}}$.

b) De manière générale, pour $\text{mystere}(a, b)$, Python calcule
 $x = a + \frac{b}{2}$ puis $y = 2x + a = 2(a + \frac{b}{2}) + a = 3a + b$
puis renvoie $\frac{y}{x} = \frac{3a + b}{a + \frac{b}{2}} = \boxed{\frac{6a + 2b}{2a + b}}$

Exercice 3 :

$$1) \frac{\frac{4}{9}}{6} = \frac{4}{9 \times 6} = \frac{2}{9 \times 3} = \boxed{\frac{2}{27}}$$

$$2) \frac{\frac{10}{15}}{\frac{6}{5}} = \frac{10 \times 6}{15} = \frac{2 \times 5 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \boxed{4}$$

$$3) (x+1) \times \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x(x+1)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x^2(x+1)}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{x^2(x+1)}{x+1} = \boxed{x^2}$$

$$4) 2 - \frac{1-x}{x-2} = \frac{2(x-2) - (1-x)}{x-2} = \frac{2x-4-1+x}{x-2} = \boxed{\frac{3x-5}{x-2}}$$

$$\begin{aligned} 5) x\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \right)^2 &= x\sqrt{x} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 - 4\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + (2\sqrt{x})^2 \right) \\ &= x\sqrt{x} \left(\frac{1}{x} - 4 + 4x \right) \\ &= \boxed{\sqrt{x} - 4x\sqrt{x} + 4x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = 2x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-3}{12} = \frac{3}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{1}{18} \right\}}$.

2) Le discriminant de $-2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 4 \times (-2) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$$

donc ce polynôme a deux racines :

$$\alpha = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times (-2)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{-4} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times (-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Comme de plus son coefficient dominant est $-2 < 0$,
l'ensemble des solutions de l'équation $-2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \leq 0$ est

$$\boxed{\mathcal{S}_2 =]-\infty, -\frac{1}{4}] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty[}$$

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|3-x|=6 \Leftrightarrow (3-x=6 \text{ ou } 3-x=-6)$$

$$\Leftrightarrow (x=-3 \text{ ou } x=9)$$

donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_3 = \{-3, 9\}$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(1-2x)^2 \geq 16 \Leftrightarrow (1-2x \geq \sqrt{16} \text{ ou } 1-2x \leq -\sqrt{16})$$

$$\Leftrightarrow (1-4 \geq 2x \text{ ou } 1+4 \leq 2x)$$

$$\Leftrightarrow (x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } x \geq \frac{5}{2})$$

donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_4 =]-\infty, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty[$

5) On commence par résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Puis pour $x \in [-2, 2]$ on a :

$$\sqrt{4-x^2} < 1 \Leftrightarrow 4-x^2 < 1^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 3$$

$$\Leftrightarrow (x > \sqrt{3} \text{ ou } x < -\sqrt{3})$$

donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_5 = [-2, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2]$

6) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -4\}$ on a :

$$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{x+6}{x+4} \Leftrightarrow (2x-3)(x+4) = (x-1)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 8x - 12 = x^2 - x + 6x - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x = \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{6})$$

donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_6 = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

7) On commence par résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\bullet x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{et } \bullet x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ou } x=-2).$$

Puis, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ on a :

$$\frac{x}{x-2} > \frac{x^2+1}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} - \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+2) - (x^2+1)}{(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-2)(x+2)} > 0$$

On étudie alors les signes suivants :

$$\bullet 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\bullet x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\bullet x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

après de dresser le tableau de signes ci-dessous :

x	-2	$\frac{1}{2}$	2
$2x-1$	-	0	+
$x-2$	-		0 +
$x+2$	-	0	+
$\frac{2x-1}{(x-2)(x+2)}$	-	+	0 - +

On lit alors dans ce tableau que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} =]-2, \frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$$

8) On commence par déterminer l'ensemble de définition :

- pour $x \in \mathbb{R}$, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, puis :

- pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$2 - \frac{x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) - x = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Ainsi, on travaille finalement pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ et on a :

$$\frac{6}{2 - \frac{x}{x-1}} = (x-1)^2 \Leftrightarrow \frac{6(x-1)}{2(x-1)-x} = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x-1)}{x-2} = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1=0 \text{ ou } \frac{6}{x-2} = x-1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } 6 = (x-1)(x-2))$$

$$\Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x^2 - 3x - 4 = 0) (*)$$

Le discriminant de $x^2 - 3x - 4$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 25$,
ce polynôme a donc 2 racines : $\alpha = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = 4$ et $\beta = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = -1$.

Ainsi, on a $(*) \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=4 \text{ ou } x=-1)$.

Comme on travaillait pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, l'ensemble des solutions est finalement $\boxed{\mathcal{S} = \{4, -1\}}$.

Exercice 5

1) Le discriminant de $X^2 - 4X + 3$ est $(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$ donc ses racines sont $\frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$ et $\frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$.

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{Y_1 = \{1, 3\}}$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

On reconnaît alors l'équation (E_1) sur la deuxième ligne de ce système. Ainsi :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \text{ ou } y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 3)$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3})$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{Y_2 = \{1, -1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}}$.

3) a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on calcule que

$$\begin{aligned} (x-1)^4 - 4(x-1)^2 + 3 &= (x-1)^2 \times ((x-1)^2 - 4) + 3 \\ &= (x^2 - 2x + 1) \times (x^2 - 2x + 1 - 4) + 3 \\ &= (x^2 - 2x + 1) \times (x^2 - 2x - 3) + 3 \\ &= x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 6x + x^2 - 2x - 3 + 3 \\ &= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x \end{aligned}$$

b) Tout d'abord, on remarque que $x = 0$ n'est pas solution de l'équation (E_3) puisque $0^3 - 4 \times 0^2 + 2 \times 0 + 4 \neq 0$.

Ainsi, on peut se contenter de chercher les solutions de (E_3) appartenant à $\mathbb{R}^*$ et être sûr que, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^4 - 4(x-1)^2 + 3}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^4 - 4(x-1)^2 + 3 = 0 \quad (**)$$

On voit alors apparaître l'équation (E_2) puisque

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ y^4 - 4y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

En utilisant la question précédente, on obtient donc

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \text{ ou } y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-1=1 \text{ ou } x-1=-1 \text{ ou } x-1=\sqrt{3} \text{ ou } x-1=-\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow (x=2 \text{ ou } x=0 \text{ ou } x=1+\sqrt{3} \text{ ou } x=1-\sqrt{3})$$

Or on a vu qu'on travaillait ici pour $x \in \mathbb{R}^*$ et que 0 n'est pas solution de (E_3) , finalement l'ensemble des solutions de (E_3) est donc $\mathcal{S}_3 = \{2, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$.

4) À nouveau, $x=0$ n'est pas solution de (E_4) , donc, pour $x \in \mathbb{R}^*$,
 $1-4x+2x^2+4x^3=0 \Leftrightarrow \frac{1-4x+2x^2+4x^3}{x^3}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^3} - 4 \times \frac{1}{x^2} + 2 \frac{1}{x} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y^3 - 4y^2 + 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad (***)$$

On voit apparaître l'équation (E_3) résolue en 3)b) et aussi:

$$(***) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 2 \text{ ou } y = 1+\sqrt{3} \text{ ou } y = 1-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} = 2 \text{ ou } \frac{1}{x} = 1+\sqrt{3} \text{ ou } \frac{1}{x} = 1-\sqrt{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{1-\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E_4) est $\mathcal{S}_4 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right\}$