DS 1 - Corrigé

Exercice 1

1) Les lois de De Morgan sont, pour P et Q deux assertions :

- $\text{NON}(P \text{ ET } Q) = \text{NON}(P) \text{ OU } \text{NON}(Q)$
- $\text{NON}(P \text{ OU } Q) = \text{NON}(P) \text{ ET } \text{NON}(Q)$

2) On a :

$$\begin{aligned}
\text{NON}(P) &= \text{NON}\big((x^2 \leq 2) \text{ ET } ((y > x) \text{ OU } (|z| = 1)) \big) \\
&= \text{NON}(x^2 \leq 2) \text{ OU } \text{NON}((y>x) \text{ OU } (|z|=1)) \\
&= (x^2 > 2) \text{ OU } \big(\text{NON}(y > x) \text{ ET } \text{NON}(|z| = 1)\big) \\
&= (x^2 > 2) \text{ OU } \big((y \leq x) \text{ ET } (|z| \neq 1)\big).
\end{aligned}$$

Exercice 2

1) a)

```
def poly1(x):
    return 2*x**3 - 5*x**2 + 3*x - 4
```

b) Il faut 4 multiplications pour calculer $2x^3$, 3 pour $5x^2$ et 1 pour $3x$. Il y a par ailleurs 3 additions.
En tout, la fonction poly1 utilise donc $4+3+1+3 = \boxed{11 \text{ opérations}}$.

2) a) On calcule que $((aX+b)X+c)X + d = (aX^2+bX+c)X + d = aX^3+bX^2+cX+d$
En identifiant a, b, c et d avec les coefficients de P on a donc :
$\boxed{a = 2, \quad b = -5, \quad c = 3 \text{ et } d = -4}$

b)

```
def poly2(x):
    return ((2*x - 5)*x + 3)*x - 4
```

c) En comptant les symboles $+$, $-$ et $*$ dans le code précédent, on constate que la fonction poly2 utilise en tout $\boxed{6 \text{ opérations}}$.

[voir remarque culturelle en fin de corrigé]

Exercice 3

1) $\dfrac{2}{\frac{4}{3}} = \dfrac{2\times 3}{4} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x^2 - 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \boxed{4}$

3) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \dfrac{(5\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = \dfrac{25\times 2}{3+2\sqrt{3}+1} = \dfrac{25}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{25(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \boxed{25(2-\sqrt{3})}$.

4)
$$\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{x(x-2)}$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x(x-2)}$$
$$= \frac{x-2+x+2}{x(x-2)}$$
$$= \frac{2x}{x(x-2)}$$
$$= \boxed{\frac{2}{x-2}}$$

5)
$$\frac{(-x^2y)^3\times(xy)^{-1}}{(y\sqrt{x})^6} = \frac{(-1)^3(x^2)^3y^3x^{-1}y^{-1}}{y^6\sqrt{x}^6} = -\frac{x^6y^3x^{-1}y^{-1}}{y^6x^3}$$
$$= -x^{6-1-3}y^{3-1-6} = \boxed{-x^2y^{-4}}$$

Exercice 4

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{3} = 2x + \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \left(2 - \frac{1}{4}\right)x$$
$$\iff -\frac{5}{6} = \frac{7}{4}x$$
$$\iff x = -\frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = -\frac{10}{21}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{-\frac{10}{21}\right\}}$.

2) Le discriminant de $-2X^2 + X + 1$ est $1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9 > 0$ donc ce polynôme admet deux racines : $\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-2)} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-2)} = 1$

Comme le coefficient dominant est $-2 < 0$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$-2x^2 + x + 1 < 0 \iff x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 1$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[}$

3) Résolvons d'abord, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 9 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 9 \iff x \geqslant 3 \text{ ou } x \leqslant -3$$

Ensuite, pour $x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[3, +\infty\right[$ on résout

$$\sqrt{x^2 - 9} < 4 \iff x^2 - 9 < 16 \iff x^2 < 25 \iff -5 < x < 5$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_3 = \left]-5, -3\right] \cup \left[3, 5\right[}$

4) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ on résout :

$$\frac{4+x}{\frac{1}{2}-x} > 3 \iff \frac{4+x}{\frac{1}{2}-x} - 3 > 0 \iff \frac{4 + x - 3\left(\frac{1}{2} - x\right)}{\frac{1}{2} - x} > 0 \iff \frac{\frac{5}{2} + 4x}{\frac{1}{2} - x} > 0$$

On étudie alors les signes suivants :

- $\frac{5}{2} + 4x > 0 \iff x > -\frac{5}{8}$
- $\frac{1}{2} - x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$

On obtient donc le tableau de signes ci-dessous :

x		$-\frac{5}{8}$		$\frac{1}{2}$	
$\frac{5}{2}+4x$	$-$	0	$+$		
$\frac{1}{2}-x$			$+$	0	$-$
$\dfrac{\frac{5}{2}+4x}{\frac{1}{2}-x}$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \left]-\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right[}$.

5) On commence par résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$:

- $x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$
- $2x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$
- $3x+4 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{4}{3}$

Ainsi, on résout l'équation demandée pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4} \iff \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}\right)^2 = \sqrt{3x+4}^2$$

$$\iff x+1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + 2x+1 = 3x+4$$

$$\iff 2\sqrt{(x+1)(2x+1)} = 2$$

$$\iff (x+1)(2x+1) = 1$$

$$\iff 2x^2 + 3x + 1 = 1$$

$$\iff x(2x+3) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } 2x+3 = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

Comme $0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ mais que $-\frac{3}{2} \notin \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_5 = \{0\}}$.

Exercice 5 :

1. (a) Comme $2+\sqrt{5}>0$ et que $\sqrt{5}-2>0$ (puisque $\sqrt{5}>2$ car $5>4$), on peut bien parler des racines cubiques de ces nombres : u et v sont donc bien définis.

   (b) On a :

$$\begin{aligned}
u^3+v^3 &= \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3 + \left(-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\
&= 2+\sqrt{5}+(-1)^3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\
&= 2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2) \\
&= 4
\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{u^3+v^3=4.}$

   (c) On a :

$$\begin{aligned}
uv &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \times \left(-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\
&= -\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)} \\
&= -\sqrt[3]{\sqrt{5}^2-2^2} \\
&= -\sqrt[3]{1} = -1
\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{uv=-1.}$

   (d) On a :

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 &= (u+v)^2(u+v) \\
&= (u^2+2uv+v^2)(u+v) \\
&= u^3+2u^2v+uv^2+u^2v+2uv^2+v^3 \\
&= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 \\
&= (u^3+v^3)+3uv(u+v) \\
&= 4-3(u+v)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{(u+v)^3=4-3(u+v).}$

---

2. (a) On a :

$$P(\alpha)=\alpha^3+3\alpha-4=(u+v)^3+3(u+v)-4=0$$

   d'après la question précédente. Ainsi α est racine de P.

   (b) Pour $a,b,c\in\mathbb{R}$ on a l'égalité de polynômes suivante :

$$\begin{aligned}
(X-1)(aX^2+bX+c) &= aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c \\
&= aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c
\end{aligned}$$

   Il reste donc à trouver a,b,c de sorte que ce polynôme soit égal à X^3+3X-4 c'est-à-dire de sorte que :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=3 \\ -c=-4 \end{cases}$$

   On constate que $a=1$, $b=1$ et $c=4$ satisfont ces quatre équations.
   Ainsi $\boxed{P(X)=(X-1)(X^2+X+4).}$

5/6

(c) D'après la question précédente, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = 0 \iff (x-1)(x^2+x+4) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x^2+x+4=0$$

Or le discriminant de X^2+X+4 est $1^2 - 4 \times 4 = -15 < 0$, donc l'équation $x^2+x+4=0$ n'a pas de solution réelle.
Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $P(x)=0$ est $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}.}$

(d) La question précédente montre que P n'a qu'une seule racine réelle, 1. La première question montre, elle, que α est une racine de P. On en déduit que $\alpha = 1$.

3. (a) On a d'après les questions précédentes :

$$Q(X) = (X-u)(X-v) = X^2 - (u+v)X + uv = X^2 - \alpha X + uv = X^2 - X - 1.$$

Ainsi $\boxed{Q(X) = X^2 - X - 1.}$

(b) D'après la définition de Q, les nombres u et v sont les racines de Q.
Mais d'après la question précédente, le discriminant de Q est $(-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$, donc ses racines sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Comme de plus, u est positif et v négatif, on conclut finalement que

$$\boxed{u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } v = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

Remarque sur l'exercice 2

Le gain de 5 opérations fait entre les fonctions poly1 et poly2 peut sembler anecdotique de prime abord, et, en effet, si vous comparez l'exécution de ces deux fonctions sur votre ordinateur, vous ne constaterez sûrement pas de différence sur le temps de calcul nécessaire pour obtenir la valeur de $P(1)$ ou $P(2)$.

Toutefois, si on imagine devoir calculer $P(x)$ pour une valeur de x très grande, alors le temps de calcul de x^3 peut devenir important. De plus, si on utilise cette méthode de Horner pour calculer un polynôme de degré n grand (ici n vaut seulement 3), alors l'économie en temps de calcul peut devenir bien plus substantielle.

De manière générale, toute une branche de l'informatique, à la fois théorique et pratique, s'intéresse à la notion de temps de calcul ou de complexité d'un algorithme. Sans être au cœur du programme de BCPST, cette notion y sera tout de même abordée, notamment à travers l'exemple suivant : combien faut-il faire d'opérations pour trier dans l'ordre croissant une liste de n nombres ?