Mathématiques - mercredi 17 septembre 2025
Devoir n°1 Durée : 2 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) et le respect des consignes de présentation (encadrement, pagination...) représenteront entre 5 et 10% de la note finale.**
- **Le sujet comporte 2 pages et 5 exercices.**

Exercice 1 (cours).

1. Énoncer les deux lois de De Morgan.
2. Utiliser ces lois pour écrire la négation de l'assertion $\mathcal{P}$ suivante, portant sur trois nombres réels x, y et z :
$$\mathcal{P} \ : \ (x^2 \leq 2) \text{ ET } \Big((y > x) \text{ OU } (|z| = 1)\Big).$$

Exercice 2 (informatique).
Dans tout l'exercice, on considère le polynôme réel $P(X) = 2X^3 - 5X^2 + 3X - 4$.

1. (a) Écrire une fonction Python `poly1` prenant en argument un réel x et renvoyant $P(x)$.
   (b) Combien de multiplications et d'additions la fonction précédente utilise-t-elle au total ? *On précise qu'une puissance n compte pour n multiplications. Par exemple, le calcul de $x^4 + 2x + 1$ nécessite 5 multiplications et 2 additions en tout. Pour cette expression, la réponse attendue est donc 7.*
2. Il est en fait possible de calculer $P(x)$ de manière plus efficace, c'est-à-dire en faisant moins d'opérations. Pour cela, on propose d'écrire $P(X)$ sous *forme de Horner*, c'est-à-dire sous la forme :
$$P(X) = ((aX + b)X + c)X + d.$$
où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
   (a) Développer l'expression ci-dessus et identifier les réels a, b, c et d constituant la forme de Horner de $P(X)$.
   (b) En déduire une fonction Python `poly2` prenant en argument x et renvoyant $P(x)$ calculé grâce à la forme de Horner de $P(X)$.
   (c) Combien de multiplications et d'additions la fonction `poly2` utilise-t-elle en tout ?

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes pour x et y deux réels appropriés (on ne s'intéressera pas aux conditions d'existence de ces expressions) :

1. $\dfrac{2}{\frac{4}{3}}$
2. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$
3. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$
4. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x}$
5. $\dfrac{(-x^2y)^3\times(xy)^{-1}}{(y\sqrt{x})^6}$

Exercice 4. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{3}=2x+\dfrac{1}{2}$
2. $-2x^2+x+1<0$
3. $\sqrt{x^2-9}<4$
4. $\dfrac{4+x}{\frac{1}{2}-x}>3$
5. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x+4}$

Exercice 5. On considère les réels $u=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $v=-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Le but de l'exercice est de déterminer des expressions plus simples de u et v.

1. (a) Justifier que u et v sont bien définis.
   (b) Calculer u^3+v^3.
   (c) Montrer que $uv=-1$.
   (d) Développer puis simplifier $(u+v)^3$.
2. On pose $\alpha=u+v$, et on considère le polynôme $P(X)=X^3+3X-4$.
   (a) Déduire des questions précédentes que α est racine de P.
   (b) Déterminer trois nombres réels a,b,c tels que : $P(X)=(X-1)(aX^2+bX+c)$.
   (c) Résoudre alors l'équation $P(x)=0$ d'inconnue réelle x.
   (d) En déduire que $\alpha=1$.
3. On considère le polynôme $Q(X)=(X-u)(X-v)$.
   (a) Développer $Q(X)$ et donner une expression plus simple de ce polynôme.
   (b) En déduire des expressions plus simples de u et v.