

Programme de colles : semaine 1, du 22/9 au 26/9

1 Logique

Le principe d'exemple ou de contre-exemple pour prouver ou infirmer une assertion avec des quantificateurs n'a pas été vu en classe.

- assertions avec des quantificateurs
- connecteurs logiques ou, et, non, implique, équivaut
- négation d'une assertion avec des quantificateurs
- raisonnement par récurrence, récurrences double et forte. *On s'assurera que les élèves ont bien compris la récurrence simple avant, éventuellement, de demander une récurrence double ou forte.*

2 Nombres réels, résolution d'(in)équations

Les résolutions d'(in)équations se feront sans recourir à l'injectivité ou à la monotonie des fonctions impliquées. Les fonctions exponentielle et logarithme ne sont pas au programme de colle. La factorisation de polynômes en utilisant une racine évidente n'a pas été vue en classe.

- manipulation de fractions et de puissances. *L'élévation à une puissance non rationnelle n'a pas été traitée en classe.*
- identités remarquables : $(x + y)^2$, $(x - y)^2$, $x^2 - y^2$
- manipulation de racines carrées, utilisation de la quantité conjuguée.
- manipulation d'inégalités, tableau de signes

- polynômes du second degré : *Les élèves ne doivent pas utiliser le discriminant pour trouver les racines d'un polynôme du type $X^2 + r$ ou $X^2 + bX$.*
 - racines, signe
 - résolution d'équations du type $ax^4 + bx^2 + c = 0$
 - résolution de $x^2 \geq r$, $x^2 \leq r$
- valeur absolue :
 - interprétation en tant que distance, inégalité triangulaire. *Le corollaire pour minorer $|x - y|$ n'a pas été traité en classe.*
 - résolution de $|x| \geq r$, de $|x| \leq r$, de $|x| = |y|$, de $x^2 = y^2$.
 - distinctions de cas pour éliminer la valeur absolue
- exemples de résolutions d'(in)équations.

3 Premières sommes

Les seules manipulations exigibles sont la définition : $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=1}^n u_k$ et la linéarité. Réindiciage, retournement, télescopage et découpage (i.e. écrire par exemple $\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^{p-1} u_k$) n'ont pas été vus en classe. Encore peu d'exercices sur ce thème ont été faits en classe.

- somme d'une constante
- somme géométrique : $\sum_{k=0}^n q^k$
- sommes d'Euler : $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$
- linéarité de la somme
- preuve de la valeur d'une somme par récurrence

4 Informatique en langage Python

L'import de bibliothèque n'a pas été vu en classe. En particulier, on écrira les racines carrées avec des puissances 1/2.

- affectations de variables, échange des valeurs de deux variables
- opérations sur les nombres réels
- fonctions
- booléens : constructions avec `==`, `!=`, `>=` et avec les opérateurs `not`, `and`, `or`. Savoir tester si un entier est multiple d'un autre.
- structure conditionnelle `if`, `else`. L'instruction `elif` n'a pas encore été vue en classe.

5 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, écrire des phrases avec des quantificateurs signifiant “la fonction f admet un maximum en 3” et “la fonction f admet un maximum”.
2. Écrire une fonction Python prenant en arguments deux réels x et y et renvoyant le réel $\frac{x^2}{2y} + \sqrt{x+1}$.
3. Compléter et illustrer sur le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ les équivalences suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$: $x^2 \geq r \iff \dots$; $x^2 \leq r \iff \dots$
4. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.
5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
6. Donner et démontrer par récurrence la valeur de $\sum_{k=1}^n k$.
7. Donner la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ et/ou de $\sum_{k=0}^n q^k$.
8. Écrire une fonction Python `valabs` prenant en argument un réel x et renvoyant $|x|$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul “type remédiation” au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 1, exo 6 : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6282>
- Remédiation 2, exo 4 : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6303>

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.