1 Test de positionnement

Calculer les sommes suivantes pour n un entier approprié :	**Note**
1) $\sum_{k=1}^{n-2} 2k$	
2) $\sum_{k=0}^{n-2} 2^k$	
3) $\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{2^k}$	
4) $\sum_{k=n}^{2n} 2$	
5) $\sum_{k=0}^{n+2} 2^{2k}$	
6) $\sum_{k=0}^{n-2} (n+2k)^2$	
Total	

2 Exercices accompagnés

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 3^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} 3^{-k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+k^2}{2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (2k)^2$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)^2$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n^k$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - 2^{k+1}\right)$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2 \times 3^{2k-n}$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k-1}{n}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{2k-3}}$

3 Exercices en autonomie

Exercice 2
Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} 3^{-k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+k^2}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} n^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{2k-3}}$

Exercice 3

1. Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$$

2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k-1}{3^k}$.

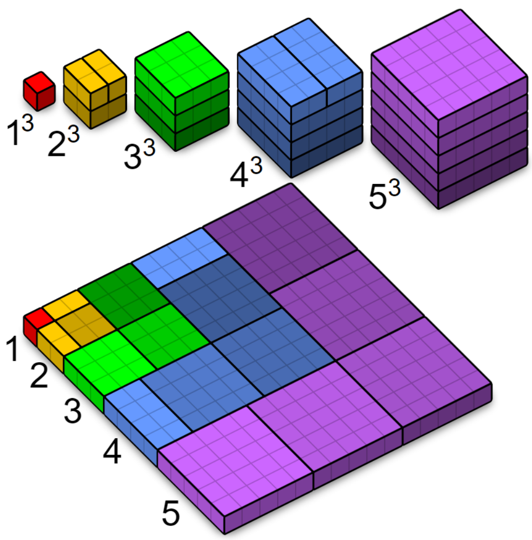
Exercice 4
Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \neq b$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Écrire la quantité $a^k b^{n-1-k}$ sous la forme $c \times q^k$ où q et c sont des nombres réels ne dépendant pas de k.
2. En déduire la formule de Bernoulli :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

3. À quoi correspond cette formule pour $n = 2$? Pour $n = 3$?

Exercice 5



Le dessin ci-contre illustre dans le cas $n = 5$ une égalité entre deux sommes de puissances d'entiers. On pourra consulter la version en couleur dans le fichier mis en ligne sur cahier de prépa.

De quelle égalité s'agit-il ? La démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.