

On rappelle les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=p}^n a = a(n-p+1)$$

Exercice 1

Calculez les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

$$2. \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{1+k}{2} = \frac{n}{2} + \frac{n(n+1)}{4}$$

$$4. \sum_{k=0}^n 3^{n-k} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Exercice 2

Calculez les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^{n-2} 2^k = 2^{n-1} - 1$$

$$2. \sum_{j=1}^{n-1} 3j = 3 \frac{n(n-1)}{2}$$

$$3. \sum_{i=1}^{n+2} (i^2 - 2) = \frac{(n+2)(2n^2 + 11n + 3)}{6}$$

$$4. \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$5. \sum_{k=0}^n \frac{2^k - 1}{5} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{5}$$

$$6. \sum_{j=1}^{n+2} n = n(n+2)$$

Exercice 3

Calculez les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}$$

$$2. \sum_{j=0}^n 2^j 5^{n-j} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

$$3. \sum_{k=0}^n \frac{3^k + 1}{2^{2k}} = \frac{16}{3} - \frac{3^{n+1} + 1}{4^n}$$

$$4. \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$$

$$5. \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k j = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$6. \sum_{k=n+1}^{2n} k + 2^k$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} 2^k$$

$$= \frac{n(3n+1)}{2} + 2^{2n+1} - 2^{n+1}$$

Exercice 4

Calculez les sommes suivantes pour tout entier n approprié :

$$1. \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k$$

$$2. \sum_{k=-2}^7 -2$$

$$3. \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2$$

$$4. \sum_{k=0}^n 2^{-3k}$$

$$5. \sum_{k=0}^n \sqrt{3}^k$$

$$6. \sum_{k=1}^n (n-k)^2$$