Remédiation 3.2

Exercice 1

1) $\dfrac{3^n - 1}{2}$

2) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2\times 3^{n+1}}$ ou $\dfrac{3^{n+2}-1}{2\times 3^{n+1}}$

3) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (2k)^2 = 4\sum_{k=1}^{n-1} k^2$

$= 4\times \dfrac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$

$= \dfrac{2n(n-1)(2n-1)}{3}$

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} 4k^2 + 4k + 1$

$= \dfrac{2n(n-1)(2n-1)}{3} + 2n(n-1) + n - 1$

$= \dfrac{n-1}{3}\times\left(2n(2n-1) + 6n + 3\right)$

$= \dfrac{(n-1)(4n^2+4n+3)}{3}$

6) $\dfrac{2}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)$

7) $\dfrac{n^{n+1}-1}{n-1}$ si $n \neq 1$

8) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2^{n+2} + 2$

9) $\displaystyle\frac{2}{3^n}\sum_{k=0}^{n} 9^k = \frac{9^{n+1}-1}{4\times 3^n}$

10) $2\dfrac{n(n+1)}{2n} - (n+1)\dfrac{1}{n} = n - \dfrac{1}{n}$

11) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

12) $\displaystyle 3^3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^k = 3^3 \times \frac{1-\frac{1}{9^{n+1}}}{1-\frac{1}{9}}$

$= \dfrac{3^5}{8}\times\left(1 - \dfrac{1}{9^{n+1}}\right) = \dfrac{3^5}{8} - \dfrac{3}{8\times 9^{n-1}}$

Exercice 2 :

1) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2\times 3^{n+1}}$ ou $\dfrac{3^{n+2}-1}{2\times 3^{n+1}}$

2) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

3) $\dfrac{(n-1)(4n^2+4n+3)}{3}$

4) $\dfrac{n^{n+1}-1}{n-1}$ si $n\neq 1$

5) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

6) $\dfrac{3^5}{8} - \dfrac{3}{8\times 9^{n-1}}$.

Remédiation 3.2

ex 3 :

1) Π_q $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$

I : $\frac{q-q^1}{(1-q)^2} - \frac{0q^1}{1-q} = 0$. ✓

H : si vrai de n alors

$$\sum_0^{n+1} kq^k = \sum_0^n kq^k + (n+1)q^{n+1}$$

$$= \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} + \frac{(n+1)q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$= \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q}\left[-nq^{n+1} + (n+1)q^{n+1} - (n+1)q^{n+2}\right]$$

$$= \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q}\left[q^{n+1} - (n+1)q^{n+2}\right]$$

$$= \frac{q-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^{n+2}}{1-q}$$

$$= \frac{q-q^{n+2}}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^{n+2}}{(1-q)} \quad \text{cqfd.}$$

2) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k-1}{3^k} = 2\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= 2\,\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 2\times\frac{9}{4}\left(\frac{1}{3} - 3^{-n-1}\right) - 3n3^{-n-1} - \frac{3}{2}\left(1-3^{-n-1}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}3^{-n} - n3^{-n} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}3^{-n} = 3^{-n}\left(-\frac{3}{2} - n + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1+n}{3^n}$$

Remédiation 3

exo 4 :

1) $a^k b^{n-1-k} = b^{n-1} \times \left(\frac{a}{b}\right)^k$

2) $\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = b^{n-1} \times \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1-\frac{a}{b}} = \frac{b^{n-1} - a^n b^{-1}}{1-ab^{-1}} = \frac{b^n - a^n}{b-a} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$

3) Pour $n=2$, $\sum_{k=0}^{1} a^k b^{1-k} = a^0 b^1 + a^1 b^0 = b+a = \frac{a^2-b^2}{a-b}$

ou encore $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

Pour $n=3$, $\sum_{k=0}^{2} a^k b^{2-k} = a^0 b^2 + a^1 b^1 + a^2 b^0 = b^2+ab+a^2 = \frac{a^3-b^3}{a-b}$

et on vérifie en effet que $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

exo 5 : Il s'agit de $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ ou encore $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

formule qu'on démontre par récurrence (n.b : pour l'hérédité, il s'agit de calculer que $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} \times \left[n^2 + 4(n+1)\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)