NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2pts). Donner sans justifier les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Question 2 (/2pts). Compléter, sans justifier, les équivalences suivantes avec des inégalités portant sur x :

$$\bullet x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$$

$$\bullet |x| \geq 2 \iff x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2$$

Question 3 (/6pts). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ .Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Tout d'abord, d'une part $u_0 = 2$, d'autre part $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$.
Donc on a bien $u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}$.

Supposons ensuite que $u_n = \frac{2}{2n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1+2} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, on a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2pts). Donner sans justifier les formules suivantes :

$$\sum_{k=p}^n a = a(n-p+1)$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Question 2 (/2pts). Compléter, sans justifier, les équivalences suivantes avec des inégalités portant sur x :

$$\bullet x^2 \geq 1 \iff x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1$$

$$\bullet |x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

Question 3 (/6pts). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ .Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$ .Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$ .Tout d'abord, d'une part $u_0 = 0$, d'autre part $\frac{0}{0+1} = 0$ .Donc on a bien $u_0 = \frac{0}{0+1}$ .Supposons ensuite que $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+1)-n} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, on a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.