TD 2 : exo 6

1) $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

2) Pour des tels x et y on a

- d'une part : $\tan(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}$

- d'autre part : $\dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} = \dfrac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}$

en multipliant num et dénom par $\cos(x)\cos(y)$

$$= \frac{\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}$$

Ainsi on a bien $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$.

TD 2 : exo 10

Soit $x \in [-1,1]$, alors $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$ (*)

Par ailleurs, $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$

et $\sin^2(\arcsin(x)) = (\sin(\arcsin(x)))^2 = x^2$

Donc $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$

En utilisant (*), on en déduit que

$$\cos(\arcsin(x)) = + \sqrt{1-x^2}.$$

TD 2 exo 8

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \iff \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \text{ ou } \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\underset{(*)}{\iff} \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{3}\right) \text{ ou } \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$\left((*) : \text{car } \cos(a) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) \text{ et } -\cos(a) = \sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}-x+2k\pi \text{ ou } 2x+\frac{\pi}{6} = \pi-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+2k\pi$$
$$\text{ou } 2x+\frac{\pi}{6} = x-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } 2x+\frac{\pi}{6} = \pi-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$$

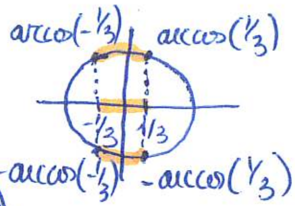
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 3x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$$
$$\text{ou } x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } 3x = \pi+2k\pi$$

d'où l'ensemble des solutions $S_1 = \left\{\frac{2k\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) Pour $x \in [0, 2\pi[$ on a :

$$3|\cos(x)| < 1 \iff |\cos(x)| < \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{3} < \cos(x) < \frac{1}{3}$$

$$\iff \left(\arccos(\tfrac{1}{3}) < x < \arccos(-\tfrac{1}{3}) \text{ ou } 2\pi-\arccos(-\tfrac{1}{3}) < x < 2\pi-\arccos(\tfrac{1}{3})\right)$$

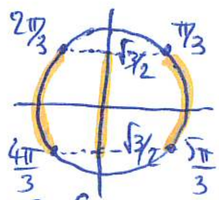


d'où l'ensemble des solutions $S_2 = \left]\arccos(\tfrac{1}{3}), \arccos(-\tfrac{1}{3})\right[\cup \left]2\pi-\arccos(-\tfrac{1}{3}), 2\pi-\arccos(\tfrac{1}{3})\right[$.

3) Pour $x \in [0, 2\pi[$ on a :

$$\sin^2(x) \leq \frac{3}{4} \iff -\sqrt{\frac{3}{4}} \leq \sin(x) \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right)$$



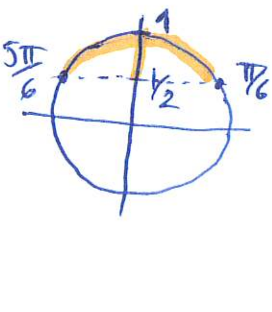
d'où l'ensemble des solutions $S_3 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$.

4) Pour $x \in [0, 2\pi[$ on a :

$$2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 < 0 \iff \begin{cases} y = \sin(x) \\ 2y^2 - 3y + 1 < 0 \end{cases} (*).$$

Le discriminant de $2X^2 - 3X + 1$ est $(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$ donc ses racines sont $\frac{3+\sqrt{1}}{2 \times 2} = 1$ et $\frac{3-\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$. Comme de plus son coefficient dominant est $2 > 0$, on a :

$$(*) \iff \begin{cases} y = \sin(x) \\ \frac{1}{2} < y < 1 \end{cases} \iff \frac{1}{2} < \sin(x) < 1$$



$$\iff \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

d'où l'ensemble des solutions $S_4 = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$.