

NOM :

PRENOM :

Note sur 10 :

Question 1 (/7pts). Calculer les sommes suivantes. Lorsque cela est possible, on écrira le résultat sous forme factorisée.

1. (/1pt) $S_1 = \sum_{k=1}^n (2k+3)$

3. (/1,5pt) $S_3 = \sum_{k=0}^n 3^k 4^{n-k}$

5. (/2pts) $S_5 = \sum_{k=1}^{n-2} (2k-1)^2$

2. (/1pt) $S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$

4. (/1,5pt) $S_4 = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{2k+1}$

$$1) S_1 = \sum_{k=1}^n (2k+3) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 3 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 3 \times (n-1+1) = n(n+1) + 3n = n(n+4)$$

$$2) S_2 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$3) S_3 = \sum_{k=0}^n 3^k 4^{n-k} = \sum_{k=0}^n 4^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = 4^n \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 4^{n+1} \left(1 - \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}\right) = 4^{n+1} - 3^{n+1}$$

$$4) S_4 = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \times 9^k = 3 \times \sum_{k=0}^{n-1} 9^k = 3 \times \frac{1 - 9^{n+1}}{1 - 9} = \frac{3}{8} (9^n - 1)$$

$$5) S_5 = \sum_{k=1}^{n-2} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n-2} 4k^2 - 4k + 1 = 4 \left(\sum_{k=1}^{n-2} k^2 - \sum_{k=1}^{n-2} k \right) + \sum_{k=1}^{n-2} 1$$

$$= 4 \times \left(\frac{(n-2)(n-2+1)(2(n-2)+1)}{6} - \frac{(n-2)(n-2+1)}{2} \right) + n-2$$

$$= (n-2) \times \left[\frac{2(n-1)(2n-3)}{3} - 2(n-1) + 1 \right]$$

$$= (n-2) \times \left[\frac{2(n-1)}{3} \times (2n-3-3) + 1 \right]$$

$$= (n-2) \times \left(\frac{4(n-1)(n-3)}{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{(n-2)(4n^2 - 16n + 15)}{3}$$

Question 2 (/3pts). Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Initialisation : Pour $n=1$ on a :

- d'une part : $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$
 - d'autre part : $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- } donc la formule est vraie pour $n=1$.

Hérédité : Supposons que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{alors } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}$$

Conclusion : par récurrence on a bien montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$