

**Boucles for (2)****TP5****Exercice 1 Simple !**

Q1 Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant u_n où $(u_n)_{n \geq 0}$ est la suite donnée par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 3n}{2n + 1}$. On vérifiera que u_5 vaut environ 1,501587.

Q2 Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant v_n où $(v_n)_{n \geq 1}$ est la suite donnée par : $v_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $v_n = (v_{n-1} + n)^2$. On vérifiera que v_5 vaut 480 004 281.

Q3 Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2k + n + 1}$. On vérifiera que S_{10} vaut environ 2,30543.

Exercice 2 Double !

Q1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{1 + u_n}$. Écrire une fonction prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant u_n . On vérifiera que u_4 vaut environ 0,1111.

Q2 Même question pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2}^2}$. On vérifiera que a_5 vaut environ 2,89.

Q3 Même question pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = x_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = \frac{nx_n + 1}{n^2 + x_{n+1}}$. On vérifiera que x_6 vaut environ 0,139.

Exercice 3 Évolution d'une population de bactéries

On cultive des bactéries en laboratoire et on sait que chaque jour le nombre de bactéries augmente de $\tau\%$ où τ est un nombre réel fixé. On appelle B_0 le nombre de bactéries au début de l'expérience, et B_n le nombre de bactéries après n jours.

Q1 (Sans ordinateur). Écrire la relation entre B_n , B_{n+1} et τ .

Q2 Écrire une fonction `population` prenant en arguments le nombre initial de bactéries, le taux de croissance τ , et le nombre n d'années considérées. Cette fonction renverra le nombre de bactéries après n jours.

Q3 Vérifier que pour une population initiale de 425 bactéries et une croissance de 1.94% par jour, on compte 756 bactéries après 30 jours.

Exercice 4 Monotonie

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

Q1 Écrire une fonction `suite` prenant en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant u_n . (Testez votre fonction !!)

Q2 La suite (u_n) vous semble-t-elle monotone ? On ne demande pas de démonstration mathématique, mais d'utiliser l'ordinateur.

Même si l'ordinateur ne suffira pas pour *prouver* que (u_n) est bien décroissante, il peut prouver¹ qu'elle l'est jusqu'à un certain rang.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante jusqu'au rang $N \in \mathbb{N}$ lorsque : $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $u_n \geq u_{n+1}$.

Q3 Écrire une fonction `decroissante` prenant en argument $N \in \mathbb{N}$ et renvoyant `True` si la suite (u_n) étudiée dans cet exercice est décroissante jusqu'au rang N et `False` sinon. On utilisera la fonction `suite` au sein de la fonction `decroissante`.

Q4 Était-ce une bonne idée d'utiliser la fonction `suite` au sein de la fonction `decroissante` ? Coder une fonction `decroissante_bis` plus efficace.

1. si on fait abstraction des erreurs de calculs dues à l'utilisation d'arrondis par Python...