Exercice 1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $(1+i)(3-2i)$
2. $i(2-i)$
3. $(3i)^2$
4. $\overline{2(1-i)} - i(2i-1)$
5. $\overline{(2-i)(2+i)}$
6. $(2\sqrt{2} - \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i + \sqrt{2})$

Exercice 2

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $(1+i)\overline{(3-i)}$
2. $\frac{1}{4-i}$
3. $\frac{1}{(1-i)^2}$
4. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
5. $\left(\frac{1}{2i+4}\right)$

Exercice 3

Placer dans le plan les points d'affixes suivantes :

1. $2-3i$
2. $1+\frac{1}{2}i$
3. -3
4. $-2i$
5. $2e^{i\pi/3}$
6. $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

Exercice 4

En utilisant que $i^2 = -1$, combien valent les puissances de i suivantes ?

$$i^3, \quad i^4, \quad i^5, \quad i^6, \quad i^{-2}, \quad i^{-1}$$

Exercice 5

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, combien vaut $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$?
2. Simplifiez $\sum_{k=0}^n (1+i)^k$.
3. Simplifiez $\sum_{k=0}^9 i^k(i-1)$.

Exercice 6

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + \frac{9}{4} = 0$
2. $z^3 + 2z = 0$
3. $2z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^4 + z^2 - 12 = 0$
5. $z^4 = 1$

Exercice 7

Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

1. $z_1 = 1+i$
2. $z_2 = 2-2i$
3. $z_3 = -1+i\sqrt{3}$
4. $\frac{z_1}{z_3}$
5. $\overline{z_2} \times z_1$
6. $z_4 = \frac{1+i}{2-2i}$
7. $z_5 = -1-i\sqrt{3}$
8. $z_6 = (-1+i\sqrt{3})^6$
9. $z_7 = \frac{(-3+3i)^3}{\sqrt{3}+3i}$
10. $z_8 = \frac{1}{1-i}$
11. $z_9 = -i$
12. $z_{10} = -2$

Exercice 8

- Déterminer tous les nombres complexes z tels que $\frac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$.
- On suppose que $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifie $|z| = 1$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
- Pour $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \iff (|u| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$.

Exercice 9

Montrer que le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés d'entiers l'est aussi.

Exercice 10

- Si $\omega \in \mathbb{C}$, rappeler l'expression de $|\omega|^2$ en fonction de ω et de son conjugué.
- Démontrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

- Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes fixés. Faire un dessin et y placer :
 - un point M d'affixe z (choisir z quelconque!),
 - un point M' d'affixe z' (choisir z' quelconque!),
 - un point A d'affixe $z+z'$,
 - un point B d'affixe $z-z'$.
- À quelle identité géométrique correspond l'égalité de la question 2?

Exercice 11

- Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Exprimez $\operatorname{Re}(z-1)$ et $\operatorname{Im}(z-1)$ en fonction de x et y .
 - Exprimez $\operatorname{Re}(z-i)$ et $\operatorname{Im}(z-i)$ en fonction de x et y .
 - En déduire les expressions de $|z-1|$ et $|z-i|$.
- Résoudre l'équation $|z-i| = |z-1|$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Placer un point A d'affixe 1 et un point B d'affixe i sur un dessin.
 - Si M est un point d'affixe z , à quoi correspondent géométriquement les quantités $|z-1|$ et $|z-i|$?
 - Retrouver géométriquement le résultat de la question 2.

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On proposera deux solutions : une approche algébrique (c'est-à-dire par le calcul) et une approche géométrique.

- $|z+1+i| = |z+1-i|$
- $|z-i| = |z-2-i| = \sqrt{2}$
- $|z-\bar{z}| \leq 1$
- $|z+1| > |z-i|$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme exponentielle, et, si possible, sous forme algébrique) :

1. $z^2 = -2 + 2i$
2. $z^2 = \sqrt{3} - 3i$
3. $z^3 = 1$
4. $z^3 = -1$
5. $z^4 = 1$

Exercice 14

Résoudre sur $\mathbb{C}$:

1. $(1 + i)z^2 + iz = 0$
2. $2\bar{z} - 1 = -z + i$
3. $e^z = 2 - 2i$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

1. $z^2 = \frac{3}{2} - 2i$
2. $z^2 = -i$

Exercice 16

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$. Déterminer z^{2023} .
2. Soit $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Calculer z^2 . En déduire la forme exponentielle de z .

Exercice 17

Linéariser les expressions suivantes (où $a, b, \theta \in \mathbb{R}$) :

1. $\cos(\theta) \sin^2(\theta)$
2. $\sin^4(\theta)$
3. $\cos(a) \sin(b)$

Exercice 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \in]0, \pi[$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$.
2. En déduire les solutions sur $]0, \pi[$ de l'équation :
 $\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$.