Mathématiques - mercredi 8 octobre 2025
Devoir nº2 Durée : 2 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Le sujet comporte 2 pages et 4 exercices.**

Exercice 1.

1. (a) Rappeler la formule pour $\sum_{k=0}^{n} q^k$ où $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Démontrer cette formule.
2. (a) Écrire une fonction Python `maxi` prenant en arguments deux nombres réels `a` et `b` et renvoyant leur maximum. *On n'utilisera pas la fonction* `max` *de Python.*
   (b) En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction `meme_max` prenant en arguments 4 nombres réels `a`, `b`, `c` et `d` et qui renvoie `True` si le maximum entre `a` et `b` est le même que le maximum entre `c` et `d`, et `False` sinon. Par exemple, `meme_max(7,1,3,7)` doit renvoyer `True`, et `meme_max(1,4,3,7)` doit renvoyer `False`. *On fera attention à écrire le code le plus simple possible.*

Exercice 2.

1. Simplifier (on ne demande pas de préciser pour quels $x \in \mathbb{R}$ cette expression a un sens) : $\dfrac{1}{x^3 - x} + \dfrac{1}{x^2 + x} + \dfrac{1}{x - 1}$.
2. Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2^{2k+1}}$.
3. Pour chacune des équations ci-dessous, la résoudre sur $\mathbb{R}$ puis préciser et représenter sur un schéma les solutions appartenant à $[0, 2\pi[$:
   (a) $2\cos(x) + 1 = 0$
   (b) $\sin(x) = \sin(2x)$
   (c) $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$
   (d) $\tan^2(x) - \tan(x) = 0$

Exercice 3.
Dans cet exercice, on cherche à déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
On introduit pour cela la quantité $S = \dfrac{1}{2} + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

1. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.
2. En déduire que $S \times \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 0$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 4.
Dans cet exercice, on étudie les suites (x_n) satisfaisant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{-a\,b}{x_n + a + b} \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{R}^* \text{ sont fixés.}$$

1. Écrire une fonction Python prenant en arguments $x_0, a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant la valeur de x_n. *Seul le code Python est demandé ici.*

Partie A. Dans cette partie uniquement, on étudie un exemple en choisissant $a = -1$ et $b = 3$; on fixe de plus que $x_0 = 5$. La suite (x_n) est donc définie par :

$$x_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2}.$$

On introduit de plus la suite (y_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \dfrac{1}{x_n + 3}$.

2. En utilisant une récurrence, démontrer que la suite (x_n) est bien définie. En déduire que (y_n) est bien définie.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \dfrac{1 - y_n}{3}$.
4. En déduire l'expression de y_n puis celle de x_n en fonction de n.
5. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Partie B. On revient maintenant au cas général où $a, b \in \mathbb{R}^*$ sont quelconques et où on étudie une suite (x_n) satisfaisant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{-a\,b}{x_n + a + b}.$$

6. Montrer que si $x_0 \neq -b$ alors $x_n \neq -b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, on peut introduire la suite (z_n) donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \frac{x_n + a}{x_n + b}.$$

7. Montrer que la suite (z_n) est géométrique de raison $\dfrac{a}{b}$.
8. En déduire l'expression de x_n en fonction de a, b, n et de z_0.
9. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.