DS 2 - Corrigé

Exercice 1

1) a) On a $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \end{cases}}$

b) • Dans le cas $q=1$, $\sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = 1\times(n-0+1) = n+1$.

• Dans le cas $q\neq 1$, démontrons par récurrence que :

$$(*) : \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Tout d'abord pour $n=0$, on a

- d'une part $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$
- d'autre part $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = 1$

donc la formule est vraie au rang $n=0$.

Supposons ensuite que, pour un certain $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

alors $$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$ ce qu'il fallait démontrer.

Finalement on a bien prouvé la formule $(*)$ par récurrence.

2. a)
```
def maxi(a,b):
    if a>b:
        return a
    else:
        return b
```

b)
```
def meme_max(a,b,c,d):
    m1 = maxi(a,b)
    m2 = maxi(c,d)
    return m1 == m2
```

(rqe : Ici il aurait été maladroit d'écrire :
```
if m1==m2:
    return True
else:
    return False
```
cf FC n°2 info)

Exercice 2

1) On calcule que : $\dfrac{1}{x^3-x}+\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x(x^2-1)}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{x-1}$

$$=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x-1}=\frac{1+(x-1)+x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x+x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x(x+2)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\boxed{\frac{x+2}{x^2-1}}$$

2) On calcule que :

- $S_n=\sum_{k=0}^{n}2^k3^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}2^k3^n3^{-k}=3^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=3^n\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$

$$=3^n\times 3\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=3^{n+1}\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)=\boxed{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

- $T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2\times(2^2)^k}=\dfrac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{4}}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\boxed{\frac{2}{3}\left(1-4^{-n}\right)}.$$

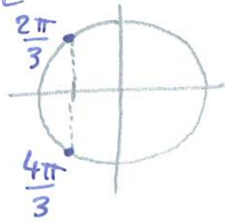
3) a) Pour $x\in\mathbb{R}$, on résout :

$2\cos(x)+1=0 \iff \cos(x)=-\dfrac{1}{2}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$\iff \exists k\in\mathbb{Z} : x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S}_1=\left\{\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}$

De plus, $\mathcal{S}_1\cap[0,2\pi[\,=\boxed{\left\{\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right\}}$



b) Pour $x\in\mathbb{R}$, on résout :

$\sin(x)=\sin(2x) \iff \exists k\in\mathbb{Z} : x=2x+2k\pi$ ou $x=\pi-2x+2k\pi$

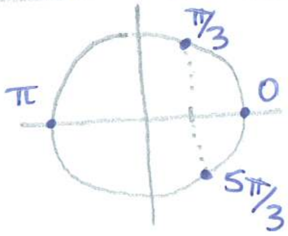
$\iff \exists k\in\mathbb{Z} : -x=2k\pi$ ou $3x=\pi+2k\pi$

$\iff \exists k\in\mathbb{Z} : x=-2k\pi$ ou $x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ -2k\pi \, , \, \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \; / \; k \in \mathbb{Z} \right\} = \boxed{\left\{ 2k\pi, \; \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \; / \; k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

De plus $\mathcal{S}_2 \cap [0, 2\pi[= \boxed{\left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}}$



c) Pour $x \in \mathbb{R}$ on commence par mettre l'expression $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $r\cos(x+\varphi)$. D'après le cours, il faut choisir

$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \quad \text{et } \varphi \text{ solution de } \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

de sorte que $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ convient, et donc :

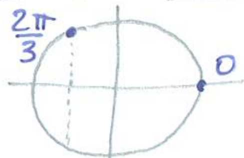
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Dès lors, on résout pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1 &\iff 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\
&\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\qquad \text{ou } x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S}_3 = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \; 2k\pi \; / \; k \in \mathbb{Z} \right\}}$

De plus, $\mathcal{S}_3 \cap [0, 2\pi[= \boxed{\left\{ 0, \frac{2\pi}{3} \right\}}$

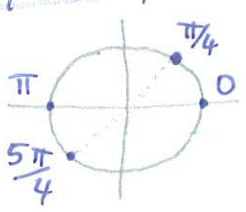


d) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \; / \; k \in \mathbb{Z} \right\}$ on résout :

$$\begin{aligned}
\tan^2(x) - \tan(x) = 0 &\iff \tan(x)(\tan(x) - 1) = 0 \\
&\iff \tan(x) = 0 \text{ ou } \tan(x) = 1 \\
&\iff \tan(x) = \tan(0) \text{ ou } \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S}_4 = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}}$ (k dans Z manque ici)

De plus $\mathcal{S}_4 \cap [0, 2\pi[= \boxed{\left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4} \right\}}$



Exercice 3

1) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b)$$
$$= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$= 2\sin(a)\cos(b)$$

donc $\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)}$

2) On calcule que $S \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$$(*) \quad = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On utilise alors la question 1) avec $a = \frac{\pi}{5}$ et $b = \frac{2\pi}{5}$ (puis $b = \frac{4\pi}{5}$) pour écrire que :

- $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)\right)$
$$= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

- $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}\right)\right)$
$$= \frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

Dès lors, revenant en $(*)$ on peut conclure que

$$S \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

donc $\boxed{S \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0}$

3) Comme $\frac{\pi}{5} \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ on a $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0$, ainsi la question précédente fournit que $S = 0$ c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

Remarquons alors que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$.

On a donc finalement obtenu que :

$$\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

ou encore que $2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} = 0$.

C'est donc que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme $2X^2 + X - \frac{1}{2}$.

Comme le discriminant de ce polynôme vaut $1 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 5$, il admet deux racines : $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\beta = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$

À ce stade, on sait donc que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ vaut soit α soit β.

Ajoutons l'argument que $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de sorte que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$.

Comme $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ c'est donc finalement que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \alpha$

c'est-à-dire $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

Exercice 4 :

1)

```
def suite(x0, a, b, n):
    x = x0
    for k in range(n):
        x = -a*b/(x+a+b)
    return x
```

(rqe : range(1, n+1) était également correct)

2) Pour montrer que (x_n) est bien définie, il faut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq -2$.

Montrons en fait par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.

Tout d'abord, pour $n = 0$, $x_0 = 5 > 0$.

Supposons ensuite que $x_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_n + 2 > 0$ et donc $\frac{3}{x_n+2} > 0$ donc $x_{n+1} > 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi on a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$, a fortiori $x_n \neq -2$.

Pour finir, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$ on a $x_n \neq -3$ et donc la suite (y_n) est correctement défini.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule que :

$$y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}+3} = \frac{1}{\frac{3}{x_n+2}+3} = \frac{x_n+2}{3+3(x_n+2)} = \frac{1}{3} \times \frac{x_n+2}{x_n+3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{(x_n+3)-1}{x_n+3} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{x_n+3}\right) = \frac{1}{3} \times (1-y_n)$$

donc $\boxed{y_{n+1} = \frac{1-y_n}{3}}$.

4) On reconnaît que (y_n) est une suite arithmético-géométrique.

On résout donc pour $l \in \mathbb{R}$:

$$l = \frac{1-l}{3} \iff 3l = 1-l \iff 4l = 1 \iff l = \frac{1}{4}$$

On introduit alors la suite $(v_n) = (y_n - \frac{1}{4})$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on calcule que :

$$v_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1-y_n}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 - y_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(-y_n + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}\left(y_n - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3} v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$v_0 = y_0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{x_0+3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5+3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

et donc $y_n = v_n + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

Dès lors, comme $y_n = \frac{1}{x_n+3}$ on a $x_n + 3 = \frac{1}{y_n}$ donc

$$x_n = \frac{1}{y_n} - 3 = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n} - 3 = \boxed{\frac{8}{2-\left(-\frac{1}{3}\right)^n} - 3}$$

5) Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ on a $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{8}{2-0} - 3 = \boxed{1}$$

6) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq -b$.

L'initialisation $x_0 \neq -b$ est donnée comme hypothèse.

L'hérédité consiste à montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a l'implication

$$x_n \neq -b \implies x_{n+1} \neq -b$$

On propose de montrer plutôt la contraposée (ce qui revient au même)

$$x_{n+1} = -b \implies x_n = -b$$

Supposons donc que $x_{n+1} = -b$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$-b = x_{n+1} = \frac{-ab}{x_n + a + b} \quad \text{donc} \quad -b(x_n + a + b) = -ab$$

Comme $b \neq 0$ on peut simplifier et obtenir $x_n + a + b = a$

donc $x_n = a - b - a = -b$ ce qu'il fallait démontrer

Finalement, on a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq -b$.

7) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$z_{n+1} = \frac{x_{n+1} + a}{x_{n+1} + b} = \frac{\frac{-ab}{x_n + a + b} + a}{\frac{-ab}{x_n + a + b} + b} = \frac{-ab + a(x_n + a + b)}{-ab + b(x_n + a + b)}$$

$$= \frac{a(-b + x_n + a + b)}{b(-a + x_n + a + b)} = \frac{a}{b} \times \frac{x_n + a}{x_n + b} = \frac{a}{b} z_n$$

Donc (z_n) est géométrique de raison $\frac{a}{b}$.

8) D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n z_0$.

Par ailleurs, comme $x_n + b \neq 0$, on peut écrire que :

$$z_n = \frac{x_n + a}{x_n + b} \quad \text{donc} \quad (x_n + b) z_n = x_n + a$$

$$\text{donc} \quad x_n z_n - x_n = a - b z_n$$

$$\text{donc} \quad x_n (z_n - 1) = a - b z_n$$

$$\text{donc} \quad x_n = \frac{a - b z_n}{z_n - 1} \quad (*)$$

Finalement, $\boxed{x_n = \dfrac{a - b\left(\frac{a}{b}\right)^n z_0}{\left(\frac{a}{b}\right)^n z_0 - 1}}$

(rqe : Pour être exact, au niveau de (*) il faudrait d'abord démontrer que $z_n \neq 1$. Comme $z_n = \dfrac{x_n + a}{x_n + b}$, cela revient à demander que $a \neq b$, chose que l'énoncé aurait dû préciser. Les copies n'ayant pas prêté attention à ce point ne seront pas pénalisées).

9) En utilisant l'expression ci-dessus on constate que :

- si $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{a-0}{0-1} = \boxed{-a}$

- si $\left|\frac{a}{b}\right| > 1$ alors on écrit

$$x_n = \frac{a - b\left(\frac{a}{b}\right)^n z_0}{\left(\frac{a}{b}\right)^n z_0 - 1} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n a - b z_0}{z_0 - \left(\frac{b}{a}\right)^n} \quad \text{avec } \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{1}{\left|\frac{a}{b}\right|} < 1$$

de sorte que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$ donc (**) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{0 - b z_0}{z_0 - 0} = \boxed{-b}$

(**) • si $\frac{a}{b} = -1$ alors x_n vaut, selon la parité de n,

$$\frac{a - b z_0}{z_0 - 1} = \frac{a + a z_0}{z_0 - 1} = a\frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} \quad \text{ou} \quad \frac{a + b z_0}{-z_0 - 1} = \frac{a - a z_0}{-z_0 - 1} = a\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$$

Or $\dfrac{z_0 + 1}{z_0 - 1} \neq \dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$ dès que $z_0 \neq 0$. Donc la suite (x_n) diverge dans ce cas.

(**) • comme précisé ci-dessus, le cas $\frac{a}{b} = 1$ ne rentre pas dans cette étude.

(rqe : Seuls les 2 premiers points (cas $\left|\frac{a}{b}\right| > 1$ et $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$) étaient vraiment attendus, les copies n'ayant pas mentionné les points (**) ne seront pas pénalisées).