

DS 2 - Corrigé

Exercice 1

1) a) On a $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

b) Dans le cas $q=1$, $\sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = 1 \times (n-0+1) = n+1$.

Dans le cas $q \neq 1$, démontrons par récurrence que :

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Tout d'abord pour $n=0$, on a

$$\left. \begin{array}{l} \text{- d'une part } \sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 \\ \text{- d'autre part } \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1 \end{array} \right\} \text{ donc la formule est vraie au rang } n=0.$$

Supposons ensuite que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer

Finalement on a bien prouvé la formule $(*)$ par récurrence.

2. a) def maxi(a, b) :

```

if a > b :
    return a
else :
    return b
  
```

b) def memo_max(a, b, c, d) :

```

m1 = maxi(a, b)
m2 = maxi(c, d)
return m1 == m2
  
```

Problème : Ici il aurait été maladroit d'écrire :

```

if m1 == m2 :
    return True
else :
    return False
  
```

d FC n° 2 info

Exercise 2

1) On calcule que : $\frac{1}{x^3-x} + \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x^2-1)} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x-1}$

$$= \frac{1}{x(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{1+(x-1)+x(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x(x+2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \boxed{\frac{x+2}{x^2-1}}$$

2) On calcule que :

- $S_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^n 2^k 3^n 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$
- $= 3^n \times 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} \left(1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right) = \boxed{3^{n+1} - 2^{n+1}}$
- $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 \times (2^2)^k} = \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{4}}$
- $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \boxed{\frac{2}{3} (1 - 4^{-n})}$

3) a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on réduit :

$$2\cos(x)+1=0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

de plus, $\mathcal{S}_1 \cap [0, 2\pi] = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on réduit :

$$\sin(x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2x + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - 2x + 2k\pi$$

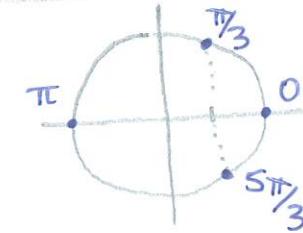
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : -x = 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = -2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{Y}_2 = \left\{ -2k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}3 \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ 2k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}3 \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus $\mathcal{Y}_2 \cap [0, 2\pi] = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$



c) Pour $x \in \mathbb{R}$ on commence par mettre l'expression $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $r\cos(x+\varphi)$. D'après le cours, il faut choisir

$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \text{ et } \varphi \text{ solution de } \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

de sorte que $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ convient, et donc :

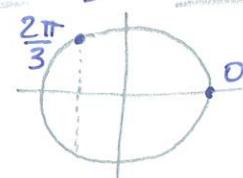
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Dès lors, on résout pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1 &\Leftrightarrow 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{Y}_3 = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

De plus, $\mathcal{Y}_3 \cap [0, 2\pi] = \left\{ 0, \frac{2\pi}{3} \right\}$

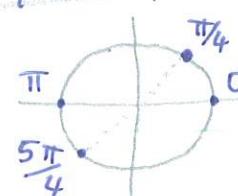


d) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ on résout :

$$\begin{aligned} \tan^2(x) - \tan(x) = 0 &\Leftrightarrow \tan(x)(\tan(x) - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan(x) = 0 \text{ ou } \tan(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \tan(x) = \tan(0) \text{ ou } \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{Y}_4 = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

De plus $\mathcal{Y}_4 \cap [0, 2\pi] = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4} \right\}$



Exercice 3

1) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) + \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(-b) - \cos(a)\sin(-b) \\ &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ &= 2\sin(a)\cos(b)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))}$

2) On calcule que $S \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$$(*) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On utilise alors la question 1) avec $a = \frac{\pi}{5}$ et $b = \frac{2\pi}{5}$ (puis $b = \frac{4\pi}{5}$) pour écrire que :

$$\begin{aligned}\bullet \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\pi\right) + \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

Dès lors, revenant en (*) on peut conclure que

$$S \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

donc $\boxed{S \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0}$

3) Comme $\frac{\pi}{5} \notin \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ on a $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0$, aussi la question précédente fournit que $S = 0$ c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

Remarquons alors que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$.

On a donc finalement obtenu que :

$$\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

$$\text{ou encore que } 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

C'est donc que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme $2X^2 + X - \frac{1}{2}$.
Comme le discriminant de ce polynôme vaut $1 - 4 \times 2 \times (-\frac{1}{2}) = 5$, il admet deux racines : $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\beta = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

À ce stade, on sait donc que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ vaut soit α soit β .

Ajoutons l'argument que $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ de sorte que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$.

Comme $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ c'est donc finalement que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \alpha$

cest-à-dire $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

Exercice 4:

1) def suite(x_0, a, b, n):

$$x = x_0$$

for k in range(n):

$$x = -a * b / (x + a + b)$$

return x

(rqe : range(1, $n+1$) était également correct)

2) Pour montrer que (x_n) est bien définie, il faut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq -2$.

Tout d'abord nous en fait par récurrence que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0}$.

Tout d'abord, pour $n=0$, $x_0 = 5 > 0$.

Supposons ensuite que $x_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_{n+2} > 0$ et donc $\frac{3}{x_{n+2}} > 0$ donc $x_{n+1} > 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi on a monté par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$, à fortiori $x_n \neq -2$.

Pour finir, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$ on a $x_n \neq -3$ et donc la suite (y_n) est correctement définie.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule que :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{x_{n+1} + 3} = \frac{1}{\frac{3}{x_n + 2} + 3} = \frac{x_n + 2}{3 + 3(x_n + 2)} = \frac{1}{3} \times \frac{x_n + 2}{x_n + 3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{(x_n + 3) - 1}{x_n + 3} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{x_n + 3}\right) = \frac{1}{3} \times (1 - y_n) \\ \text{d'nc} \quad \boxed{y_{n+1} = \frac{1-y_n}{3}}. \end{aligned}$$

4) On reconnaît que (y_n) est une suite authentico-géométrique.
On réduit donc pour $l \in \mathbb{R}$:

$$l = \frac{1-l}{3} \Leftrightarrow 3l = 1-l \Leftrightarrow 4l = 1 \Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$$

On introduit alors la suite $(v_n) = (y_n - \frac{1}{4})$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on calcule que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= y_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1-y_n}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} \times (1-y_n - \frac{3}{4}) = \frac{1}{3} \left(-y_n + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}(y_n - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$v_0 = y_0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{x_0 + 3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5+3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$\text{et d'nc } y_n = v_n + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}.$$

Dès lors, comme $y_n = \frac{1}{x_n + 3}$ on a $x_n + 3 = \frac{1}{y_n}$ d'nc

$$x_n = \frac{1}{y_n} - 3 = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n} - 3 = \boxed{\frac{8}{2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n} - 3}$$

5) Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ d'nc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{8}{2-0} - 3 = \boxed{1}$$

6) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq -b$.

L'initialisation $x_0 \neq -b$ est donnée comme hypothèse.

L'hérédité consiste à montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a l'implication

$$x_n \neq -b \Rightarrow x_{n+1} \neq -b$$

On propose de montrer plutôt la contraposée (ce qui revient au même)

$$x_{n+1} = -b \Rightarrow x_n = -b$$

Supposons donc que $x_{n+1} = -b$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$-b = x_{n+1} = \frac{-ab}{x_n + a + b} \text{ donc } -b(x_n + a + b) = -ab$$

Comme $b \neq 0$ on peut simplifier et obtenir $x_n + a + b = a$

donc $x_n = a - b - a = -b$ ce qu'il fallait démontrer

Finalement, on a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq -b$.

7) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{x_{n+1} + a}{x_{n+1} + b} = \frac{\frac{-ab}{x_n + a + b} + a}{\frac{-ab}{x_n + a + b} + b} = \frac{-ab + a(x_n + a + b)}{-ab + b(x_n + a + b)} \\ &= \frac{a(-b + x_n + a + b)}{b(-a + x_n + a + b)} = \frac{a}{b} \times \frac{x_n + a}{x_n + b} = \frac{a}{b} z_n \end{aligned}$$

Donc (z_n) est géométrique de raison $\frac{a}{b}$.

8) D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n z_0$.

Par ailleurs, comme $x_n + b \neq 0$, on peut écrire que :

$$z_n = \frac{x_n + a}{x_n + b} \text{ donc } (x_n + b)z_n = x_n + a$$

$$\text{donc } x_n z_n - x_n = a - bz_n$$

$$\text{donc } x_n(z_n - 1) = a - bz_n$$

$$\text{donc } (*) \quad x_n = \frac{a - bz_n}{z_n - 1}$$

Finalement,

$$x_n = \frac{a - b \left(\frac{a}{b}\right)^n z_0}{\left(\frac{a}{b}\right)^n z_0 - 1}$$

(rg : Pour être exact, au niveau de (*) il faudrait d'abord démontrer que $z_0 \neq 1$. Comme $z_n = \frac{z_n + a}{z_n + b}$, cela revient à demander que $a \neq b$, chose que l'énoncé aurait dû préciser. Les copies n'ayant pas prêté attention à ce point ne seront pas pénalisées).

g) En utilisant l'expression ci-dessus on constate que :

- si $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{a - 0}{0 - 1} = \boxed{-a}$

- si $\left|\frac{a}{b}\right| > 1$ alors on écrit

$$x_n = \frac{a - b \left(\frac{a}{b}\right)^n z_0}{\left(\frac{a}{b}\right)^n z_0 - 1} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n a - b z_0}{z_0 - \left(\frac{b}{a}\right)^n} \quad \text{avec } \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{1}{\left|\frac{a}{b}\right|} < 1$$

de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{0 - b z_0}{z_0 - 0} = \boxed{-b}$

(**) • si $\frac{a}{b} = -1$ alors x_n vaut, selon la parité de n ,

$$\frac{a - b z_0}{z_0 - 1} = \frac{a + a z_0}{z_0 + 1} = a \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} \quad \text{ou} \quad \frac{a + b z_0}{-z_0 - 1} = \frac{a - a z_0}{-z_0 - 1} = a \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$$

Or $\frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} + \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$ dès que $z_0 \neq 0$. Donc la suite (x_n) diverge dans ce cas.

(**) • comme précisé ci-dessus, le cas $\frac{a}{b} = 1$ ne rentre pas dans cette étude.

(rg : Seuls les 2 premiers points (cas $\left|\frac{a}{b}\right| > 1$ et $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$) étaient vraiment attendus, les copies n'ayant pas mentionné les points (***) ne seront pas pénalisées).