

TD 3

exo 4

$$1) u_1 = u_0 + 3^1 = 1 + 3$$

$$u_2 = u_1 + 3^2 = 1 + 3 + 3^2$$

$$u_3 = u_2 + 3^3 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3$$

$$2) \text{ Il semble donc que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

$$\text{Vérifions par récurrence que : } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

$$\text{I: } \frac{3^{0+1}-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 = u_0 \quad \text{OK}$$

$$\text{II: Si } u_n = \frac{3^{n+1}-1}{2} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}, \text{ alors}$$

$$u_{n+1} = u_n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{2 \times 3^{n+1}}{2} = \frac{3 \times 3^{n+1} - 1}{2} = \frac{3^{n+2}-1}{2} \quad \text{q.f.d.}$$

exo 5

Notons u_n le capital après n années.

$$\text{D'après l'énoncé, } u_0 = 1000 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{2}{100} = \frac{51}{50} u_n$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times \left(\frac{51}{50}\right)^n = 1000 \times \left(\frac{51}{50}\right)^n$$

exo 13

$$P(X) = X^2 + \lambda^2$$

$$z_1 = i\lambda = \lambda e^{i\pi/2}, (z_2 = -i\lambda)$$

$$u_n = \lambda^n \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

$$\mu_0 = \lambda$$

$$\mu_1 = \lambda \mu$$

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n \left(\mu_0 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\mu_1}{\lambda} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$