

TD 4 :

Exo 9 :

2) Comme $|z|=1$, on a $\sqrt{z\bar{z}}=1$ donc $z\bar{z}=1$ donc $\bar{z}=\frac{1}{z}$.
Dès lors on calcule que

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

donc $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

3) On a : $\frac{z-\mu\bar{z}}{1-\mu} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-\mu\bar{z}}{1-\mu}\right)} = \frac{z-\mu\bar{z}}{1-\mu}$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-\bar{\mu}z}{1-\bar{\mu}} = \frac{z-\mu\bar{z}}{1-\mu}$$
$$\Leftrightarrow (\bar{z}-\bar{\mu}z)(1-\mu) = (z-\mu\bar{z})(1-\bar{\mu})$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}-\bar{\mu}z-\mu\bar{z}+\mu\bar{\mu}z = z-\mu\bar{z}-\bar{\mu}z+\mu\bar{\mu}\bar{z}$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}+\mu\bar{\mu}z = z+\mu\bar{\mu}\bar{z}$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}-z+\mu\bar{\mu}z-\mu\bar{\mu}\bar{z}=0$$
$$\Leftrightarrow -(z-\bar{z})+\mu\bar{\mu}(z-\bar{z})=0$$
$$\Leftrightarrow (z-\bar{z})(-1+\mu\bar{\mu})=0$$
$$\Leftrightarrow z-\bar{z}=0 \text{ ou } \mu\bar{\mu}=1$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}=z \text{ ou } |\mu|^2=1$$
$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } |\mu|=1$$