

TD 4

Exo 12 Notant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$2) |z - i| = |z - 2 - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + i(y-1)|^2 = 2 \\ |x-2 + i(y-1)|^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 2 - x^2 \\ (x-2)^2 + 2 - x^2 = 2 \end{cases}$$

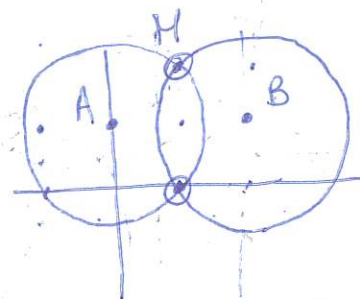
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 2 - x^2 \\ -4x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 2 - 1 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = 1 \text{ ou } y-1 = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ ou } y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + 2i \text{ ou } z = 1$$



Si $A(i)$, $B(2+i)$, $M(z)$

alors :

$$|z - i| = |z - 2 - i| = \sqrt{2}$$

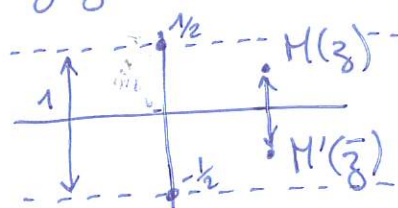
$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{2} \\ BM = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \text{cercle}(A, \sqrt{2}) \\ M \in \text{cercle}(B, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M(1) \text{ ou } M(1+2i)$$

$$\mathcal{Y} = \{1, 1+2i\}$$

$$3) |z - \bar{z}| \leq 1 \Leftrightarrow |2iy| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$$



Si $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ alors $|z - \bar{z}| \leq 1 \Leftrightarrow MM' \leq 1$

$\Leftrightarrow M$ est dans la bande horizontale centrée sur l'axe des abscisses et de largeur 1

$$\mathcal{Y} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$$

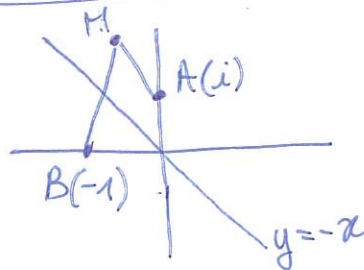
$$4) |z + 1| > |z - i|$$

$$\Leftrightarrow |x + 1 + iy| > |x + i(y-1)|$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 > x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x > -2y$$

$$\Leftrightarrow y > -x$$



Si $A(i)$, $B(-1)$ et $M(z)$

alors $|z + 1| > |z - i|$

$$\Leftrightarrow BM > AM$$

$\Leftrightarrow M$ est plus proche de A que de B

$\Leftrightarrow M$ est au-dessus de la droite d'équation $y = -x$

$$\mathcal{Y} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > -x\}$$