

NOM :

PRENOM :

Note sur 5 :

Question 1 (/1pt).

Calculer la forme algébrique de $z_1 = \frac{1}{(i-3)^2}$.

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{1}{i^2 - 2 \times 3i + 3^2} = \frac{1}{8-6i} \\
 &= \frac{8+6i}{(8-6i)(8+6i)} = \frac{8+6i}{64-36i^2} \\
 &= \frac{8+6i}{100} = \frac{4+3i}{50}
 \end{aligned}$$

Question 2 (/1pt).

Calculer la forme exponentielle de $z_2 = 3 - 3i$.

$$\begin{aligned}
 \bullet |z_2| &= \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\
 \bullet z_2 &= 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\
 &= 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\
 &= 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\
 &= 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

Question 3 (/3pts). Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer u_n en fonction de n .

Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + 2X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4$, ses racines sont $z_1 = \frac{-2+i\sqrt{4}}{2} = -1+i$ (et $z_2 = \bar{z}_1 = -1-i$).

On calcule $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

donc $z_1 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Ainsi: $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}^n \left(\lambda \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right)$

On résout alors le système

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2}^0 (\lambda \cos(0) + \mu \sin(0)) \\ u_1 = \sqrt{2}^1 \left(\lambda \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \sqrt{2} \left(-\lambda \frac{\sqrt{2}}{2} + \mu \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ -1 + \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + 3\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right)$

NOM :

PRENOM :

Note sur 5 :

Question 1 (/1pt).

Calculer la forme algébrique de $z_1 = \frac{1}{(i-2)^2}$.

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{1}{i^2 - 4i + 4} = \frac{1}{3 - 4i} \\
 &= \frac{3 + 4i}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i}{9 - 16i^2} \\
 &= \frac{3 + 4i}{25}
 \end{aligned}$$

Question 2 (/1pt).

Calculer la forme exponentielle de $z_2 = -2 + 2i$.

$$\begin{aligned}
 \bullet |z_2| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\
 \bullet z_2 &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\
 &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\
 &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \\
 &= 2\sqrt{2} e^{3i\pi/4}
 \end{aligned}$$

Question 3 (/3pts). Soit (u_n) définie par $u_0 = \sqrt{3}$, $u_1 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$. Déterminer u_n en fonction de n .

Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - \sqrt{3}X + 1$
 Son discriminant vaut $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 = -1$
 Ses racines sont $z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ (et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$)

$$\text{On calcule } |z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\text{donc } z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\pi/6}$$

$$\text{Ainsi : } \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1^n \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right) = \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

On résout alors le système

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) \\ u_1 = \lambda \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \mu \times \frac{1}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\sqrt{3} \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mu = -2 \end{cases}$$

$$\text{Finalement, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\sqrt{3} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\sqrt{3} \\ \mu = -1 \end{cases}$$