Partie A : exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) \simeq 2,7$.
Les règles de calcul sont similaires à celles sur les calculs de puissances.
Mentionnons par aileurs que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.

Les formules à connaître pour l'exponentielle

1. $e^0 = 1$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^a \times e^b = e^{a+b}$
3. $\forall a \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
5. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (e^a)^b = e^{ab}$
6. $\forall a \in \mathbb{R},\ \sqrt{e^a} = (e^a)^{1/2} = e^{\frac{a}{2}}$

Attention, il n'y a pas de formule permettant de simplifier $e^a + e^b$ ou $e^a - e^b$ ou $-e^a$.

En identifiant bien quelle formule vous utilisez, traitez les exercice ci-dessous. Les corrigés sont disponibles sur cahier de prépa.

Exercice 1
Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^{2x}e^{1-2x}$
2. $\left(e^{2x-1}\right)^2 e^{3x+4}$
3. $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-1}}$

Exercice 2
Montrer les identités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Exercice 3
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^{-2x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$
2. $e^{x-y^2}\left(e^{y^2-x}\right)^2$
3. $\dfrac{e^{3x}}{e^{-x}\left(e^{-3x}\right)^2}$

Exercice 4
Montrer les identités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 = 4$

Partie B : logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ c'est-à-dire que $\ln : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Cela signifie que $\ln(x)$ n'a de sens que si $x > 0$.

<u>Les formules à connaître pour le logarithme</u>

1. $\ln(1) = 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall b \in \mathbb{R},\ \ln(a^b) = b\ln(a)$
6. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{1/2}) = \dfrac{a}{2}$

Attention, il n'y a pas de formule pour simplifier $\ln(a+b)$ ou $\ln(a-b)$. On ne peut pas non plus simplifier $\ln(a) \times \ln(b)$ ou $\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$.

<u>En identifiant bien quelle formule vous utilisez</u>, traitez les exercice ci-dessous. Les corrigés sont disponibles sur cahier de prépa.

Exercice 5
Écrire avec un seul logarithme népérien les quantités suivantes :

1. $3\ln(2) - \ln(16) + \ln(4)$
2. $\ln(49) - \ln(\sqrt{7})$
3. $\ln(\frac{2}{3}) + \ln(\frac{3}{4}) + \ln(\frac{4}{5})$ *(on proposera deux méthodes)*

Exercice 6
Démontrer les formules suivantes et préciser pour quelles valeurs de x elles sont correctes :

1. $\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
2. $\ln(\sqrt{2x}) = \dfrac{\ln(x) + \ln(2)}{2}$

Exercice 7
Écrire avec un seul logarithme népérien les quantités suivantes :

1. $\frac{1}{2}\ln(4) - 4\ln(\frac{1}{2})$
2. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
3. $\ln\left(\dfrac{x^2 y}{z^3}\right) - 2\ln(x) + 2\ln(yz^2) - \ln(z)$ *(pour $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$)*

Exercice 8
Démontrer les formules suivantes et préciser pour quelles valeurs de x elles sont correctes :

1. $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2-2}}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2 - 2)$
2. $2\ln(x+2) - \ln(2-x) = \ln\left(\dfrac{x^2+4x+4}{2-x}\right)$

Partie C : exponentielle et logarithme

Les fonctions exponentielles et logarithmes népérien sont réciproques l'une de l'autre. Cela signifie qu'on a les formules suivantes.

Les formules à connaître liant exponentielle et logarithme

1. $\forall a \in \mathbb{R},\ \ln(e^a) = a$
2. $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ e^{\ln(a)} = a$

Mentionnons également que : $\boxed{\ln(e) = \ln(e^1) = 1.}$

Remarque : la formule 1 ci-dessus a bien un sens car pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $e^a > 0$ donc on peut bien considérer l'expression $\ln(e^a)$.

En identifiant bien quelle formule vous utilisez, traitez les exercices ci-dessous. Les corrigés sont disponibles sur cahier de prépa.

Exercice 9
Simplifiez pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}_*^+$:

1. $\ln((e^x)^2)$
2. $\exp(-\dfrac{1}{2}\ln(z))$
3. $\ln\left(\dfrac{e^x}{(e^y)^2}\right)$

Exercice 10
Simplifier pour $x \in \mathbb{R}$:

1. $\exp\left(\dfrac{1}{2}\ln(4)\right)$
2. $\ln\left(\dfrac{e^x}{e^{2x-1}}\right)$
3. $\exp\left(\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{e^x})\right)$

Partie D : résolution d'équations

Les propriétés suivantes permettant de résoudre des équations avec des exponentielles et des logarithmes népériens.

Les formules à connaître pour les résolutions d'équations

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a : $e^a = e^b \iff a = b$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_*^+$ on a : $e^a = b \iff a = \ln(b)$.
3. Pour $a, b \in \mathbb{R}_*^+$ on a : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$.
4. Pour $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $b \in \mathbb{R}$ on a : $\ln(a) = b \iff a = e^b$.

En utilisant ces règles, résolvez les équations proposées. Les corrigés sont disponibles sur cahier de prépa.

Attention, il faut souvent d'abord utiliser des propriétés sur les exponentielles et logarithmes ou mener d'autres étapes de calcul avant de pouvoir se ramener à une des 4 propriétés de l'encadré.
Par ailleurs, on rappelle que $\ln(a)$ n'a de sens que si $a > 0$. Ainsi les équations impliquant des logarithmes doivent être précédées d'une étape où l'on identifie pour quelles valeurs de x elles ont un sens. Il faut donc **résoudre au préalable une ou plusieurs inéquations** du type $a > 0$ avant de résoudre l'équation elle-même.

Exercice 11
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x+1} = e^{-x-1}$
2. $e^{3x-1} = 3$
3. $e^{3x} = \dfrac{e^{x+1}}{e^{-x}}$
4. $e^{2x-1} = 0$
5. $(e^x + 2)(e^{-x} - 3) = 0$
6. $\dfrac{e^x + 5}{2 + e^x} = 2$
7. $(e^x - 1)^2 = 1$
8. $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
9. $e^x + 1 = 2e^{-x}$

Exercice 12
Résoudre sur $\mathbb{R}$ (attention aux ensembles de définition !) :

1. $\ln(2x + 3) = \ln(2)$
2. $\ln(1 - x) = 2$
3. $\ln(2x + 3) = 0$
4. $\ln(3x + 4) = \ln(1 - x)$
5. $\ln(3x + 4) = \ln(-3 - x)$
6. $\ln(x - 2) + \ln(3) = \ln(6 - x)$
7. $\ln(x - 1) - \ln(x) = \ln(2)$
8. $\ln(x - 1) - \ln(3x - 1) + \ln(2) = 0$

Exercice 13
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^{-x+1}} = \left(e^{x+1}\right)^2$
2. $e^{x^2-5x+4} = 1$
3. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
4. $e^x - 3e^{-x} - 2 = 0$
5. $\ln(-x + 1) = -3$
6. $(\ln(x))^2 = 1$
7. $\ln((x + 2)(x - 2)) = 0$
8. $\ln(x+2) = -\ln(x-2)$