
Mathématiques - Devoir maison n°1
À rendre le lundi 3 novembre 2025
Une copie par groupe de colle

Exercice 1.
Dans cet exercice, on étudie de deux manières différentes la suite complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$z_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = iz_n + 3 - i.$$

1. *En revenant aux suites réelles.*
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \mathcal{R}e(z_n),\ y_n = \mathcal{I}m(z_n)$ et $a_n = x_n - 2$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.
   (b) Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre deux suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -a_n$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.
2. *En s'inspirant des suites arithmético-géométriques.*
   (a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z = iz + 3 - i$. On note ℓ la solution trouvée, qu'on exprimera sous forme algébrique.
   (b) Que peut-on dire de la suite $(w_n)_{n\geq 0} = (z_n - \ell)_{n\geq 0}$?
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 2 + i - i^{n+1}$, puis retrouver le résultat de la question 1(c).

Exercice 2.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} = e^{ix}\frac{e^{2inx} - 1}{e^{2ix} - 1}$.
   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}$.
2. En déduire les solutions sur $]0, \pi[$ de l'équation :

$$\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0.$$