Plusieurs solutions sont toujours possibles : en cas de doute, n'hésitez pas à me proposer une autre façon de mener les calculs. Si ce corrigé contient des erreurs, les élèves les signalant marquent des points de participation.

Partie A : exponentielle

Exercice 1

1. $$\begin{aligned} e^{2x}e^{1-2x} &= e^{2x+1-2x} \quad \text{via } e^a \times e^b = e^{a+b} \\ &= e^1 \\ &= \boxed{e} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \left(e^{2x-1}\right)^2 e^{3x+4} &= e^{2(2x-1)}e^{3x+4} \quad \text{via } (e^a)^n = e^{na} \\ &= e^{4x-2}e^{3x+4} \\ &= e^{(4x-2)+(3x+4)} \quad \text{via } e^a \times e^b = e^{a+b} \\ &= e^{7x+2} \\ &= \boxed{e^{7x+2}} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} &= e^{(2x+3)-(x-1)} \quad \text{via } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \\ &= e^{2x+3-x+1} \\ &= e^{x+4} \\ &= \boxed{e^{x+4}} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. $$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{(e^x + e^{-x})e^x}{2e^x} \quad \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } e^x \\ &= \frac{e^x e^x + e^{-x}e^x}{2e^x} \\ &= \frac{e^{2x} + e^0}{2e^x} \quad \text{via } e^a \times e^b = e^{a+b} \\ &= \boxed{\frac{e^{2x}+1}{2e^x}} \quad \text{car } e^0 = 1 \end{aligned}$$

2. $\dfrac{e^x}{e^x-1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}$ mise au même dénominateur

$= \dfrac{e^x(e^x+1-e^x+1)}{(e^x)^2-1}$ numérateur : factoriser par e^x

et dénominateur : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$= \dfrac{e^x \times 2}{e^{2x}-1}$ via $(e^x)^2 = e^{2x}$

$= \dfrac{2}{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}$ division par e^x au numérateur et au dénominateur

$= \dfrac{2}{e^{2x-x} - e^{-x}}$ via $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$

$= \boxed{\dfrac{2}{e^x - e^{-x}}}$

Exercice 3

1. $e^{-2x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}} = e^{-2x} - \left(1 + \dfrac{1}{e^{2x}}\right)$ en divisant chaque terme du numérateur

$= e^{-2x} - 1 - e^{-2x}$ car $\dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$

$= -1$

$= \boxed{-1}$

2. $e^{x-y^2}\left(e^{y^2-x}\right)^2 = e^{x-y^2} \cdot e^{2(y^2-x)}$ via $(e^a)^n = e^{na}$

$= e^{x-y^2+2y^2-2x}$ via $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$= e^{-x+y^2}$

$= \boxed{e^{-x+y^2}}$

3. $\dfrac{e^{3x}}{e^{-x}(e^{-3x})^2} = \dfrac{e^{3x}}{e^{-x} \cdot e^{-6x}}$ via $(e^a)^n = e^{na}$

$= \dfrac{e^{3x}}{e^{-x-6x}}$

$= \dfrac{e^{3x}}{e^{-7x}}$

$= e^{3x-(-7x)}$ via $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$= \boxed{e^{10x}}$

Exercice 4

1. $$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} && \text{en multipliant par } \frac{e^x}{e^x} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} && \text{via } e^x \cdot e^x = e^{2x} \text{ et } e^x \cdot e^{-x} = 1 \\ &= \boxed{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 &= e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) \\ &\text{(identités remarquables } (a+b)^2 \text{ et } (a-b)^2 \text{ et } (e^x)^2 = e^{2x},\ (e^{-x})^2 = e^{-2x}) \\ &= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x} \quad \text{car } e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1 \\ &= \boxed{4} \end{aligned}$$

2 bis. $$\begin{aligned} (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 &= (e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) \times (e^x + e^{-x} - (e^x - e^{-x})) \\ &\text{(identité remarquable } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)) \\ &= 2e^x \times 2e^{-x} \\ &= \boxed{4} \quad \text{car } e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Partie B : logarithme népérien

Exercice 5

1. $$\begin{aligned} 3\ln(2) - \ln(16) + \ln(4) &= 3\ln(2) - \ln(2^4) + \ln(2^2) \\ &= 3\ln(2) - 4\ln(2) + 2\ln(2) \quad \text{via } \ln(a^b) = b\ln(a) \\ &= \boxed{\ln(2)} \end{aligned}$$

1 bis. $$\begin{aligned} 3\ln(2) - \ln(16) + \ln(4) &= \ln(2^3) - \ln(2^4) + \ln(2^2) && \text{via } b\ln(a) = \ln(a^b) \\ &= \ln\left(\frac{2^3}{2^4}\right) + \ln(2^2) && \text{via } \ln(a) - \ln(b) = \ln(\tfrac{a}{b}) \\ &= \ln\left(\frac{2^3 \times 2^2}{2^4}\right) && \text{via } \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \\ &= \ln(2^{3+2-4}) && \text{via } \frac{x^a x^b}{x^c} = x^{a+b-c} \\ &= \boxed{\ln(2)} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \ln(49) - \ln(\sqrt{7}) &= \ln(7^2) - \ln(7^{1/2}) \quad \text{car } 49 = 7^2,\ \sqrt{7} = 7^{1/2} \\ &= 2\ln(7) - \tfrac{1}{2}\ln(7) \quad \text{via } \ln(a^b) = b\ln(a) \\ &= \boxed{\tfrac{3}{2}\ln(7)} \\ &= \ln(7^{3/2}) \\ &= \ln(7\sqrt{7}) \qquad \text{car } x^{3/2} = x^1 \times x^{1/2} = x\sqrt{x} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \ln\left(\tfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) + \ln\left(\tfrac{4}{5}\right) &= \ln\left(\tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{4}{5}\right) \quad \text{via } \ln(a) + \ln(b) + \ln(c) = \ln(abc) \\ &= \boxed{\ln\left(\tfrac{2}{5}\right)} \end{aligned}$$

3 bis. $\ln\left(\tfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) + \ln\left(\tfrac{4}{5}\right)$

$$\begin{aligned} &= [\ln(2) - \ln(3)] + [\ln(3) - \ln(4)] + [\ln(4) - \ln(5)] \quad \text{via } \ln\left(\tfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ &= \ln(2) - \ln(5) \\ &= \boxed{\ln\left(\tfrac{2}{5}\right)} \end{aligned}$$

Exercice 6

1. $\ln(x^2-1)-\ln(x^2+2x+1)$

$= \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right)$ via $\ln(a)-\ln(b)=\ln(\frac{a}{b})$

$= \ln\left(\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right)$ via les identités remarquables

$= \boxed{\ln(\frac{x-1}{x+1})}$

Ce calcul est valable pour $x\in\mathbb{R}$ tel que $x^2-1>0$ et $x^2+2x+1>0$ c'est-à-dire $\boxed{x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.}$

Attention, si vous avez mené le calcul de la manière suivante :

1 bis. $\ln(x^2-1)-\ln(x^2+2x+1)$

$= \ln((x-1)(x+1))-\ln((x+1)^2)$ via les identités remarquables

$= \ln(x-1)+\ln(x+1)-2\ln(x+1)$ via $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ et $\ln(a^2)=2\ln(a)$

$= \ln(x-1)-\ln(x+1)$

$= \boxed{\ln(\frac{x-1}{x+1})}$ via $\ln(a)-\ln(b)=\ln(\frac{a}{b})$

alors dans ce cas, ce calcul n'est valable que si $x-1>0$ et $x+1>0$ soit seulement pour $\boxed{x\in]1,+\infty[.}$

2. $\ln(\sqrt{2x})$

$= \frac{1}{2}\ln(2x)$ via $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

$= \frac{\ln(2)+\ln(x)}{2}$ via $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

Ce calcul est valable pour $\boxed{x\in\mathbb{R}_*^+.}$

Exercice 7

1. $\frac{1}{2}\ln(4) - 4\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \ln(\sqrt{a}) - \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$ via $a\ln(b) = \ln(b^a)$

$= \ln(2) - \ln\left(\frac{1}{16}\right)$

$= \ln(2) + \ln(16)$ via $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$= \boxed{\ln(32)}$ via $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

2. $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ via $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{5}^2 - 1^2}{2^2}\right)$ identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$= \ln(1)$

$= \boxed{0}$ car $\ln(1) = 0$

3. $\ln\left(\frac{x^2 y}{z^3}\right) - 2\ln(x) + 2\ln(yz^2) - \ln(z)$

$= \ln(x^2) + \ln(y) - \ln(z^3) - 2\ln(x) + 2\ln(yz^2) - \ln(z)$ via $\ln\left(\frac{ab}{c}\right) = \ln(a) + \ln(b) - \ln(c)$

$= 2\ln(x) + \ln(y) - 3\ln(z) - 2\ln(x) + 2\Big(\ln(y) + 2\ln(z)\Big) - \ln(z)$ via $\ln(ab^2) = \ln(a) + 2\ln(b)$

$= \boxed{3\ln(y)}$

Exercice 8

1. $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2-2}}\right)$

$= \ln\left(\left(\frac{1}{x^2-2}\right)^{1/2}\right)$ car $\sqrt{a} = a^{1/2}$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2-2}\right)$ via $\ln(a^b) = b\ln(a)$

$= \frac{1}{2} \times (-\ln(x^2-2))$ via $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$= \boxed{-\frac{1}{2}\ln(x^2-2)}$

Ce calcul est valable pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 2 > 0$ c'est-à-dire $\boxed{x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[.}$

2. $2\ln(x+2) - \ln(2-x)$

$= \ln((x+2)^2) - \ln(2-x)$ via $a\ln(b) = \ln(b^a)$

$= \ln\left(\frac{(x+2)^2}{2-x}\right)$ via $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$= \boxed{\ln\left(\frac{x^2+4x+4}{2-x}\right)}$ développement de $(x+2)^2$

Ce calcul est valable pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + 2 > 0$ et $2 - x > 0$ c'est-à-dire $\boxed{x \in]-2, 2[.}$

Partie C : exponentielle et logarithme

Exercice 9

1. $\ln((e^x)^2) = \ln(e^{2x})$ via $(e^a)^b = e^{ab}$

$= \boxed{2x}$ via $\ln(e^a) = a$

ou 1.bis $\ln((e^x)^2) = 2\ln(e^x)$ via $\ln(a^b) = b\ln(a)$

$= \boxed{2x}$

2. $\exp(-\frac{1}{2}\ln(z)) = \dfrac{1}{\exp(\frac{1}{2}\ln(z))}$ via $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$= \dfrac{1}{\exp(\ln(\sqrt{z}))}$ via $\frac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a})$

$= \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{z}}}$ via $\exp(\ln(a)) = a$

3. $\ln\left(\dfrac{e^x}{(e^y)^2}\right) = \ln\left(e^{x-2y}\right)$ via $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $(e^a)^2 = e^{2a}$

$= \boxed{x - 2y}$ via $\ln(e^a) = a$

Exercice 10

1. $$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{2}\ln(4)\right) &= \exp\left(\ln(\sqrt{4})\right) && \text{via } \frac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a}) \\ &= \exp(\ln(2)) && \text{car } \sqrt{4} = 2 \\ &= \boxed{2} && \text{via } \exp(\ln(a)) = a \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^x}{e^{2x-1}}\right) &= \ln\left(e^{x-(2x-1)}\right) && \text{via } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \\ &= \ln\left(e^{-x+1}\right) && \text{en développant : } x-(2x-1) = -x+1 \\ &= \boxed{-x+1} && \text{via } \ln(e^a) = a \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{2}\ln(\sqrt{e^x})\right) &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left((e^x)^{1/2}\right)\right) && \text{via } \sqrt{a} = a^{1/2} \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln\left(e^x\right)\right) && \text{via } \ln(\sqrt{a}) = \tfrac{1}{2}\ln(a) \\ &= \exp\left(\frac{1}{4}x\right) && \text{via } \ln(e^a) = a \\ &= \boxed{e^{x/4}} \end{aligned}$$

Partie D : résolution d'équations

Exercice 11

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :
$$e^{2x+1} = e^{-x-1} \iff 2x+1 = -x-1 \iff x = -\frac{3}{2}.$$
Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{-\frac{3}{2}\}.}$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :
$$e^{3x-1} = 3 \iff 3x-1 = \ln(3) \iff x = \frac{\ln(3)+1}{3}.$$
Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_2 = \{\frac{\ln(3)+1}{3}\}.}$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :
$$e^{3x} = \frac{e^{x+1}}{e^{-x}} \iff e^{3x} = e^{2x+1} \iff 3x = 2x+1 \iff x = 1.$$
Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_3 = \{1\}.}$

4. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \emptyset}$ car pour tout $y \in \mathbb{R},\ e^y > 0$.

5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :
$$\begin{aligned}(e^x+2)(e^{-x}-3) = 0 &\iff e^x+2 = 0 \text{ ou } e^{-x}-3 = 0\\ &\iff e^x = -2 \text{ ou } e^{-x} = 3\\ &\iff e^{-x} = 3 \quad (\text{car pour tout } y \in \mathbb{R},\ e^y > 0)\\ &\iff -x = \ln(3)\\ &\iff x = -\ln(3).\end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_5 = \{-\ln(3)\}.}$

6. Déjà, on travaille bien pour $x \in \mathbb{R}$ car : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x+2 > 0$ donc $e^x+2 \neq 0$. On résout donc :
$$\begin{aligned}\frac{e^x+5}{2+e^x} = 2 &\iff e^x+5 = 2(2+e^x)\\ &\iff e^x+5 = 4+2e^x\\ &\iff e^x = 1\\ &\iff x = \ln(1) = 0\end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_6 = \{0\}.}$

7. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :
$$\begin{aligned}(e^x-1)^2 = 1 &\iff e^x-1 = 1 \text{ ou } e^x-1 = -1\\ &\iff e^x = 2 \text{ ou } e^x = 0\\ &\iff e^x = 2 \quad (\text{car pour tout } y \in \mathbb{R},\ e^y > 0)\\ &\iff x = \ln(2).\end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_7 = \{\ln(2)\}.}$

8. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \iff (e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0 \iff \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Or un calcul mental rapide montre que les racines du polynôme $X^2 - 4X + 3$ sont 1 et 3, donc

$$(*) \iff \begin{cases} y = e^x \\ y = 1 \text{ ou } y = 3 \end{cases} \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3 \iff x = 0 \text{ ou } x = \ln(3)$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_8 = \{0, \ln(3)\}.}$

9. En multipliant par e^x on obtient une équation similaire à celle de la question précédente : pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :

$$e^x + 1 = 2e^{-x} \iff (e^x)^2 + e^x = 2 \iff (e^x)^2 + e^x - 2 = 0 \iff e^x \text{ est racine de } X^2 + X - 2 \ (*)$$

Or les racines de $X^2 + X - 2$ sont, après calcul, 1 et -2, d'où :

$$(*) \iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = -2 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_9 = \{0\}.}$

Exercice 12

1. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 3 > 0 \iff x > -\dfrac{3}{2}$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$:

$$\ln(2x+3) = \ln(2) \iff 2x + 3 = 2 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Comme $-\dfrac{1}{2} \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{-\frac{1}{2}\}.}$

2. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $1 - x > 0 \iff x < 1$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\infty, 1[$:

$$\ln(1-x) = 2 \iff 1 - x = e^2 \iff x = 1 - e^2.$$

Comme $1 - e^2 \in]-\infty, 1[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_2 = \{1 - e^2\}}$.

3. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $2x+3>0 \iff x > -\dfrac{3}{2}$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$:

$$\ln(2x+3) = 0 \iff 2x+3 = e^0 \iff 2x+3 = 1 \iff x = -1.$$

Comme $-1 \in]-\frac{3}{2}, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_3 = \{-1\}}$.

4. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les inéquations $3x+4>0 \iff x > -\dfrac{4}{3}$ et $1-x>0 \iff x<1$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\frac{4}{3}, 1[$:

$$\ln(3x+4) = \ln(1-x) \iff 3x+4 = 1-x \iff 4x = -3 \iff x = -\frac{3}{4}.$$

Comme $-\dfrac{3}{4} \in]-\frac{4}{3}, 1[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \{-\frac{3}{4}\}}$.

5. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les inéquations $3x+4>0 \iff x > -\dfrac{4}{3}$ et $-3-x>0 \iff x<-3$. Il n'existe aucun x tel que $x > -\dfrac{4}{3}$ et $x < -3$ simultanément. Donc, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_5 = \varnothing}$.

6. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les inéquations $x-2>0 \iff x>2$ et $6-x>0 \iff x<6$. On résout donc ensuite, pour $x \in]2, 6[$:

$$\begin{aligned}
\ln(x-2)+\ln(3) = \ln(6-x) &\iff \ln(3(x-2)) = \ln(6-x) \\
&\iff 3(x-2) = 6-x \\
&\iff 3x-6 = 6-x \\
&\iff 4x = 12 \\
&\iff x = 3.
\end{aligned}$$

Comme $3 \in]2, 6[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_6 = \{3\}}$.

Remarque : attention ici pour la première équivalence, il ne faut pas aller trop vite et écrire "en passant à l'exponentielle" $x-2+3 = 6-x$. En effet, $\exp(\ln(a)+\ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab \neq \exp(\ln(a)) + \exp(\ln(b)) = a+b$.

7. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les inéquations $x-1>0 \iff x>1$ et $x>0$. On résout donc ensuite, pour $x \in]1, +\infty[$:

$$\ln(x-1) - \ln(x) = \ln(2) \iff \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln(2) \iff \frac{x-1}{x} = 2 \iff x-1 = 2x \iff x = -1.$$

Comme $-1 \notin]1, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_7 = \varnothing}$.

8. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les inéquations $x-1>0 \iff x>1$ et $3x-1>0 \iff x>\dfrac{1}{3}$. On résout donc ensuite, pour $x \in]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\ln(x-1)-\ln(3x-1)+\ln(2)=0 &\iff \ln\left(\frac{x-1}{3x-1}\right)+\ln(2)=0\\
&\iff \ln\left(\frac{2(x-1)}{3x-1}\right)=0\\
&\iff \frac{2(x-1)}{3x-1}=1\\
&\iff 2x-2=3x-1\\
&\iff x=-1.
\end{aligned}$$

Comme $-1 \notin]1,+\infty[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_8=\varnothing}$.

Exercice 13

1. On résout pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2x}}{e^{-x+1}}=\left(e^{x+1}\right)^2 &\iff e^{2x-(-x+1)}=e^{2(x+1)}\\
&\iff e^{3x-1}=e^{2x+2}\\
&\iff 3x-1=2x+2\\
&\iff x=3.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1=\{3\}}$.

2. On résout pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
e^{x^2-5x+4}=1 &\iff x^2-5x+4=0\\
&\iff x=1 \text{ ou } x=4 \quad \textit{(via un calcul de discriminant par exemple)}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_2=\{1,4\}}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :

$$\begin{aligned}
e^{2x}-5e^x+6=0 &\iff (e^x)^2-5e^x+6=0\\
&\iff \begin{cases} y=e^x\\ y^2-5y+6=0\end{cases} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Or un calcul mental rapide montre que les racines du polynôme X^2-5X+6 sont 2 et 3, donc

$$(*) \iff \begin{cases} y=e^x\\ y=2 \text{ ou } y=3\end{cases} \iff e^x=2 \text{ ou } e^x=3 \iff x=\ln(2) \text{ ou } x=\ln(3)$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_3 = \{\ln(2), \ln(3)\}}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on résout :

$$e^x - 3e^{-x} - 2 = 0 \iff e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0 \iff (e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$$
$$\iff \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Les racines de $X^2 - 2X - 3$ sont -1 et 3, donc

$$(*) \iff \begin{cases} y = e^x \\ y = 3 \text{ ou } y = -1 \end{cases} \iff \Big(e^x = 3 \text{ ou } e^x = -1\Big) \iff e^x = 3 \iff x = \ln(3)$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \{\ln(3)\}}$.

5. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $-x + 1 > 0 \iff x < 1$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\infty, 1[$:

$$\begin{aligned} \ln(-x+1) = -3 &\iff -x + 1 = e^{-3} \\ &\iff x = 1 - e^{-3}. \end{aligned}$$

Comme $1 - e^{-3} \in]-\infty, 1[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_5 = \{1 - e^{-3}\}}$.

6. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $x > 0$. On résout donc ensuite, pour $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} (\ln(x))^2 = 1 &\iff \ln(x) = 1 \text{ ou } \ln(x) = -1 \\ &\iff x = e \text{ ou } x = e^{-1}. \end{aligned}$$

Comme $e, e^{-1} \in]0, +\infty[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_6 = \{e, e^{-1}\}}$.

7. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $(x+2)(x-2) > 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. On résout donc ensuite, pour $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \ln((x+2)(x-2)) = 0 &\iff (x+2)(x-2) = 1 \\ &\iff x^2 - 4 = 1 \\ &\iff x^2 = 5 \\ &\iff x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{5} \in]2, +\infty[$ et $-\sqrt{5} \in]-\infty, -2[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_7 = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}}$.

8. On commence par résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les inéquations $x+2>0 \iff x>-2$ et $x-2>0 \iff x>2$. On résout donc ensuite, pour $x \in]2,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\ln(x+2) = -\ln(x-2) &\iff \ln(x+2)+\ln(x-2)=0\\ &\iff \ln((x+2)(x-2))=0\\ &\iff (x+2)(x-2)=1\\ &\iff x^2-4=1\\ &\iff x^2=5\\ &\iff x=\sqrt{5} \ \text{ ou } \ x=-\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{5} \in]2,+\infty[$ et que $-\sqrt{5} \notin]2,+\infty[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_8=\{\sqrt{5}\}}$.