

# Programme de colles : semaine 5, du 3/11 au 7/11

*Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.*

## 1 Suites usuelles

- suites arithmétiques, géométriques, limites de telles suites. *La formule générale pour la somme des termes successifs de telles suites (i.e. “de  $p$  à  $n$ ”) n’a pas été donnée.*
- suites arithmético-géométriques. *La méthode de détermination du terme général doit être connue.*
- exemples d’utilisation de suites auxiliaires pour se ramener à des suites usuelles
- suites récurrentes linéaires d’ordre 2

## 2 Nombres complexes

*L’utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n’est pas un objectif du programme. On utilisera en revanche l’interprétation géométrique pour illustrer des calculs algébriques.*

- forme algébrique, parties réelle et imaginaire
- résolution dans  $\mathbb{C}$  d’équations polynomiales de degré 2 à coefficients réels. *Les élèves ne doivent pas utiliser le discriminant pour résoudre  $z^2 = a$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .*
- conjugaison, règles de calcul
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}, z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$
- calcul de la forme algébrique d’un quotient
- notion d’affixe d’un point du plan, interprétation géométrique de la somme, de l’opposé, du conjugué
- module : définition, règles de calcul, le module coïncide avec la valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ , interprétation géométrique : si  $A$  et  $B$  sont d’affixes  $z_A$  et  $z_B$  alors  $AB = |z_A - z_B|$ .
- inégalité triangulaire sur  $\mathbb{C}$ . *Le cas d’égalité et le corollaire permettant de minorer  $|z - z'|$  n’ont pas été abordés en classe.*
- forme trigonométrique, argument, notation exponentielle. Application aux suites récurrentes linéaires d’ordre 2 (cas  $\Delta < 0$ ). *règles de calculs et interprétation géométrique. Vocabulaire : on ne fait pas de distinction entre formes trigonométrique, polaire et exponentielle.*
- pour  $r, r' \in \mathbb{R}^+$  et  $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$  :  $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \varphi + 2k\pi$
- formules d’Euler. Application à la linéarisation de produits de cosinus et sinus
- technique “de l’angle moitié” pour déterminer la forme trigonométrique de  $e^{i\theta} \pm e^{i\varphi}$
- formule de Moivre, “délinéarisation” de  $\cos(k\theta)$ ,  $\sin(k\theta)$
- calculs de sommes trigonométriques
- exponentielle complexe : pour  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  on définit  $e^z = e^x e^{iy}$
- résolution de  $z^2 = w$  pour  $w \in \mathbb{C}$  en passant par la forme polaire ou par la forme algébrique de  $z$ . Exemples de résolutions de  $z^n = w$  en passant par la forme polaire de  $z$ . *Aucun résultat sur les racines  $n$ -ème de l’unité n’a été énoncé en classe.*

### 3 Informatique en langage Python

*L'import de bibliothèque n'a pas été vu en classe. En particulier, on écrira les racines carrées avec des puissances  $1/2$ .*

- boucles `while`, algorithmes de seuil.

### 4 Questions de cours

*Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :*

1. Résoudre sur  $\mathbb{C}$  une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels choisie par l'examinateur.
2. Donner la définition du conjugué de  $z \in \mathbb{C}$  puis démontrer que :  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{zz'} = \overline{z} \overline{z'}$ . Si  $M$  est un point d'affixe  $z$ , indiquer sur un schéma comment placer le point  $M'$  d'affixe  $\overline{z}$ .
3. Donner la définition du module de  $z \in \mathbb{C}$  puis démontrer que :  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z| |z'|$ . Si  $M$  est un point d'affixe  $z$ , indiquer sur un schéma à quoi correspond géométriquement  $|z|$ .
4. Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  où  $(u_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas  $\Delta < 0$ ) choisie par l'examinateur.
5. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur  $\mathbb{C}$ .
6. Résoudre sur  $\mathbb{C}$  :  $z^2 = w$  où  $w \in \mathbb{C}$  est une constante choisie par l'examinateur. *On précisera aux élèves si on souhaite qu'ils cherchent  $z$  sous forme algébrique ou polaire.*
7. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
8. Linéariser  $\cos(\theta) \sin^2(\theta)$ .
9. Pour  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$  et  $n \in \mathbb{N}$  déterminer les valeurs de  $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$  et de  $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ .
10. Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$ . On admet que  $(u_n)$  est décroissante et tend vers 0. Écrire une fonction Python `seuil` prenant en argument  $\varepsilon > 0$  et renvoyant la plus grande valeur de  $u_n$  telle que  $u_n < \varepsilon$ .

*Cette semaine, toutes les colles se poursuivront par deux calculs du type suivant :*

- Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe (exemples :  $\frac{3+i}{1-i}, (1-2i)^2 \overline{(3+i)}, \overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)}$ ).
- Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe  $z$  simple choisi par l'examinateur (exemples :  $1+i, \sqrt{3}-i, \frac{1+i^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$ )

*La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.*