Exercice 1

1. Écrire les sommes et produits suivants avec le symbole $\sum$ ou $\prod$ et les calculer :
   (a) $1+3+5+7+\cdots+2025$
   (b) $2\times4\times6\times8\times\cdots\times(2n)$
2. Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à transformer un symbole $\sum$ ou $\prod$ en pointillés :
   (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{-k}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(3k)$

Exercice 2

Dans cet exercice, on fixe $q\in\mathbb{R}$ et $p,n\in\mathbb{N}$ tels que $q\neq1$ et $p\leq n$.

1. Rappeler la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.
2. En effectuant un "découpage" déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$.
3. En effectuant le changement d'indice $j=k-p$, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$ trouvée à la question précédente.

Exercice 3

Écrire avec des factorielles les nombres suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n} k$
2. $\dfrac{5\times6\times7\times\cdots\times(n-1)}{9\times10\times11\times\cdots\times(n+1)}$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$

Exercice 4

Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à utiliser des pointillés :

1. $\displaystyle\sum_{k=50}^{100} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k+1}$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \ln(k+1)$
5. $\displaystyle\sum_{k=5}^{p} \ln(k+3)$
6. $\displaystyle\prod_{k=5}^{n-1} 2\sqrt{k}\,k$
7. $2^0-2^1+2^2-2^3+2^4-\cdots+2^{2n}-2^{2n+1}$

Exercice 5

1. Simplifier via un décalage d'indice :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{n}(k+3)^2$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n+5} 2^k$
2. Simplifier via un téléscopage :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+2}-\sqrt{k}$

Exercice 6

1. Simplifier via un retournement :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^n}{e^k}$
   (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+1-k)$
2. Simplifier via un téléscopage :
   (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

Exercice 7
Remplacer les symboles “ ?” par la valeur correcte.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=?}^{?} a_j$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)a_k = \sum_{j=?}^{?} j a_?$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} = \sum_{j=?}^{?} a_j$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (n-k)^3 = \sum_{j=?}^{?} j^3$

Exercice 8

1. Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.
2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.
3. Par une technique similaire, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

Exercice 9
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme (dite harmonique) : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite (H_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$. (On écrira $H_{2n} - H_n$ sous forme d'une somme).
3. En déduire que $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. (On pourra utiliser qu'une suite croissante est soit convergente, soit tend vers $+\infty$).

Exercice 10
Soit n un entier naturel non nul, on considère la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

Calculer S en effectuant le retournement $k' = n - k$.

Exercice 11
Pour $p \in \mathbb{N}$, que vaut : $p! \times (p+1)$?
Simplifier alors les expressions suivantes :

1. $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{(n+2)!}{n!}$
2. $\dfrac{(n+1)! - n!}{n}$
3. $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$

Exercice 12
Calculer les coefficients binomiaux suivants :

1. $\dbinom{7}{3}$
2. $\dbinom{n}{2}$
3. $\dbinom{23}{22}$
4. $\dbinom{130}{128}$

Exercice 13
Développez à l'aide du binôme de Newton et des premières lignes du triangle de Pascal les quantités :

1. $(a+b)^5$
2. $(1+x)^4$
3. $(1-x)^6$
4. $(2x-1)^3$

Exercice 14
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-n}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$

Exercice 15
Soient $0 \leq p \leq n$ des entiers.

1. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, montrer que :
$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$
2. À quoi correspond la formule ci-dessus lorsque $k = 1$?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

Exercice 16
En utilisant la formule d'absorption, calculer pour $n \geq 2$:

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
2. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :
$$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \in \mathbb{N}$$

Exercice 18
Calculer les valeurs de
$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$$

On pourra s'intéresser aux quantités $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$.