

Feuille de cours 5.1 : coefficients binomiaux

1 Définitions

Rappel : pour $n \in \mathbb{N}$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et $0! =$

Rappel : pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a la propriété utile suivante : $(p-1)! \times p =$

Exemple : $\frac{(p+2)!}{p!} =$

Définition 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (lire :) par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k! (n-k)!} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : $\binom{5}{2} =$

Remarque : de manière générale, le quotient définissant $\binom{n}{k}$ se simplifie sous la forme :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{(n-k)! \times (n-k+1) \times (n-k+2) \times \cdots \times (n-1) \times n}{k! \times (n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+1) \times (n-k+2) \times \cdots \times (n-1) \times n}{k!} \end{aligned}$$

Proposition 2

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

Démonstration :

Exercice : Simplifier $\binom{n+1}{2} =$

2 Propriétés

Proposition 3 (symétrie)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration :

Exemple : en utilisant la proposition 2 on a donc :

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0} = \quad \text{et} \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} =$$

Proposition 4 (absorption)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Remarque : dans cette formule $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et non pas $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ car

Démonstration :

Exercice : en utilisant la formule d'absorption, compléter les formules suivantes

$$\binom{n+1}{k-1} = \frac{n+1}{\dots} \binom{\dots}{k-2} \quad \text{et} \quad (k+1) \binom{n-1}{k+1} = \dots \binom{n-2}{\dots}$$

Proposition 5 (formule de Pascal)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration :

Remarque :

Grâce à cette formule on peut démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Pour s'en convaincre, on peut représenter les coefficients binomiaux sous forme d'un tableau triangulaire : le *triangle de Pascal*. On place le coefficient $\binom{n}{k}$ sur la n -ème ligne et la k -ème colonne. Il faut connaître sans hésiter les premières lignes du tableau.

Remarques :

• valeurs extrêmes : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} =$

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} =$

• la formule de Pascal s'illustre ainsi :

• les lignes sont symétriques car

3 Binôme de Newton

On connaît l'identité remarquable $(a + b)^2 =$

On peut en déduire que

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3\end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= (a + b)^3(a + b) \\ &= (a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3)(a + b) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3b^2a^2 + ab^3 + ba^3 + 3a^2b^2 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

On remarque que les coefficients apparaissant dans le développement de $(a + b)^n$ sont en fait les

De manière générale, on a la propriété suivante :

Proposition 6 (binôme de Newton)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque : en effectuant le retournement $j = n - k$ sur la somme précédente, on obtient aussi que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$.

En effet, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} a^{n-j} b^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Exercice : en appliquant la formule du binôme de Newton (version de la remarque), retrouver les identités remarquables pour $(a + b)^2$ et $(a + b)^3$.

Démonstration du binôme de Newton : on fixe $a, b \in \mathbb{C}$ et on démontre par récurrence que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Initialisation : pour $n = 0$, d'une part $(a + b)^0 = 1$, d'autre part $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.
 Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b) \times (a + b)^n \\
 &= (a + b) \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &\quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{(on développe)} \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{(via } j = k + 1 \text{ pour la 1ère somme)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{(} j \text{ remplacé par } k \text{ (variable muette))} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \right) + \left(\binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) \\
 &\quad \text{(séparation des termes } k = n + 1 \text{ pour la 1ère somme et } k = 0 \text{ pour la 2ème)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} b^0 + a^0 b^{n+1} \\
 &\quad \text{(rassemblement des termes pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
 &\quad \text{(formule de Pascal et } \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0} = 1 \text{)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\quad \text{(réintégration des termes en } k = 0 \text{ et } k = n + 1 \text{ dans la somme)}
 \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$, ce qui achève la preuve par récurrence.

□

Méthode pour développer rapidement $(a + b)^n$ pour de petites valeurs de n :

1. placer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (lus sur la n -ème ligne du triangle de Pascal)
2. placer les puissances de a en croissant de a^0 à a^n (ou, respectivement, en décroissant de a^n à a^0)
3. placer les puissances de b en décroissant de b^n à b^0 (ou, respectivement, en croissant de b^0 à b^n)

Et pour $(a - b)^n$? : écrire que $(a - b)^n =$ puis utiliser que $(-b)^k =$

Exercice : développer rapidement $(a + b)^4$, $(a - b)^4$, $(1 + x)^3$, $(x - 1)^5$.

Pour finir, un exercice classique consiste à devoir introduire artificiellement un terme en 1^k ou 1^{n-k} pour simplifier une somme grâce à un binôme de Newton, ou de devoir modifier l'écriture de la quantité sommée pour faire apparaître du $a^k b^{n-k}$.

Exercice : calculer les sommes suivantes :

$$1. S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$2. S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$3. S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+2} 3^{k-n+1}$$