

Devoir maison n°1
Corrigé

Exercice 1 :

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= iz_n + 3 - i \\ &= i(x_n + iy_n) + 3 - i \\ &= (3 - y_n) + i(x_n - 1) \end{aligned}$$

donc $x_{n+1} = 3 - y_n$ et $y_{n+1} = x_n - 1$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on calcule que :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= x_{n+2} - 2 \\ &= (3 - y_{n+1}) - 2 \\ &= 1 - y_{n+1} \\ &= 1 - (x_n - 1) \\ &= 2 - x_n \\ &= -a_n. \end{aligned}$$

- (c) Le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence satisfaite par la suite (a_n) est $P(X) = X^2 + 1$. Ses racines sont i et $-i$. Comme la forme exponentielle de i est $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$ on en déduit que :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

On utilise alors les valeurs de $a_0 = x_0 - 2 = 0$ et $a_1 = x_1 - 2 = (3 - y_0) - 2 = (3 - 0) - 2 = 1$ pour déterminer λ et μ :

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) \\ a_1 = \lambda \cos(\pi/2) + \mu \sin(\pi/2) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, donc $x_n = a_n + 2 = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Et comme $x_{n+1} = 3 - y_n$ on a :

$$\begin{aligned} y_n &= 3 - x_{n+1} = 3 - \left(2 + \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(en utilisant dans la dernière égalité que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$).

Finalement : $z_n = x_n + iy_n = 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.

2. (a) Pour $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$z = iz + 3 - i \iff (1 - i)z = 3 - i \iff z = \frac{3 - i}{1 - i}.$$

Or $\frac{3 - i}{1 - i} = \frac{(3 - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 1 + 3i - i}{1^2 + 1^2} = 2 + i$. Ainsi $\boxed{\ell = 2 + i}$.

- (b) $\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est géométrique de raison (complexe) } i}$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= z_{n+1} - (2 + i) \\ &= iz_n + 3 - i - 2 - i \\ &= iz_n + 1 - 2i \end{aligned}$$

Là où

$$\begin{aligned} iw_n &= i(z_n - (2 + i)) \\ &= iz_n - 2i + 1 \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = iw_n$.

- (c) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 i^n$. Or $w_0 = z_0 - (2 + i) = 2 - 2 - i = -i$ donc $w_n = -i^{n+1}$ et donc $\boxed{z_n = w_n + 2 + i = 2 + i - i^{n+1}}$.

Pour retrouver la formule de la question 1(c), on écrit :

$$\begin{aligned} z_n &= 2 + i - i^{n+1} = 2 + i - i \times i^n \\ &= 2 + i - i \times \left(e^{i\pi/2}\right)^n \\ &= 2 + i - i \times e^{in\pi/2} \\ &= 2 + i - i \times (\cos(n\pi/2) + i \sin(n\pi/2)) \\ &= 2 + i - i \cos(n\pi/2) + \sin(n\pi/2) \\ &= 2 + \sin(n\pi/2) + i(1 - \cos(n\pi/2)). \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. (a) On calcule que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ix} e^{2ikx} = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2ix})^k.$$

Comme $x \in]0, \pi[$ on a $2x \in]0, 2\pi[$ donc $e^{2ix} \neq 1$. On applique donc la formule d'une somme géométrique pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} = e^{ix} \frac{1 - (e^{2ix})^{n-1+1}}{1 - e^{2ix}} = \boxed{e^{ix} \frac{e^{2inx} - 1}{e^{2ix} - 1}}.$$

- (b) Factorisons par l'angle moitié dans le quotient précédent :

$$e^{ix} \times \frac{e^{2inx} - 1}{e^{2ix} - 1} = e^{ix} \times \frac{e^{inx} (e^{inx} - e^{-inx})}{e^{ix} (e^{ix} - e^{-ix})} = e^{ix} \times \frac{e^{inx}}{e^{ix}} \times \frac{2i \sin(nx)}{2i \sin(x)} = e^{inx} \times \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.$$

Dès lors, la somme demandée vaut :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im} \left(e^{(2k+1)ix} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(e^{inx} \times \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \right) \\
 &= \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \operatorname{Im} \left(e^{inx} \right) \\
 &= \boxed{\frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}}.
 \end{aligned}$$

2. En utilisant la question précédente avec $n = 4$ on a :

$$\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) + \sin(7x) = \sum_{k=0}^3 \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(4x)}{\sin(x)}.$$

Dès lors, pour $x \in]0, \pi[$ on peut mener la résolution suivante :

$$\begin{aligned}
 &\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0 \\
 \iff &\frac{\sin^2(4x)}{\sin(x)} = \sin(4x) \\
 \iff &\sin^2(4x) = \sin(4x) \sin(x) \quad (\text{correct car } \sin(x) \neq 0 \text{ car } x \in]0, \pi[) \\
 \iff &\sin(4x) \times (\sin(4x) - \sin(x)) = 0 \\
 \iff &\sin(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(4x) = \sin(x) \\
 \iff &\exists k \in \mathbb{Z} : 4x = k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \pi - x + 2k\pi \\
 \iff &\exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{k\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi + 2k\pi}{5}
 \end{aligned}$$

Comme $x \in]0, \pi[$ on obtient finalement l'ensemble des solutions suivant :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5} \right\}.$$