

Programme de colles : semaine 6, du 10/11 au 14/11

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Nombres complexes

Reprise du programme précédent.

2 Sommes et produits

La formule de Bernoulli, le binôme de Newton et la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$ n'ont pas été vus en classe.

- symboles \sum et \prod , caractère muet de l'indice de sommation, convention $\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0$ et $\prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$.
- exemple de la factorielle
- règles de calcul : linéarité de la somme, somme d'une constante, formules analogues pour les produits
- $\exp\left(\sum_{k=p}^n a_k\right) = \prod_{k=p}^n \exp(a_k)$
- $\ln\left(\prod_{k=p}^n b_k\right) = \sum_{k=p}^n \ln(b_k)$
- $\prod_{k=p}^n \lambda^{a_k} = \lambda^{\sum_{k=p}^n a_k}$
- démonstration d'une valeur de somme/produit par récurrence
- découpage : relation de Chasles, exemples : écriture de $\prod_{k=p}^n k$ avec des factorielles, formules pour $\sum_{k=m}^n q^k$ et

$\sum_{k=m}^n k$. Ces deux dernières formules ne sont pas à connaître par cœur mais doivent pouvoir être retrouvées sans difficulté.

- découpage : termes pairs/impairs
- décalage : $\sum_{k=p}^n a_{k+r} = \sum_{j=p+r}^{n+r} a_j$, formule analogue pour le produit
- télescopage : $\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$, $\prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$, exemple : calcul de la somme géométrique. *On conseille aux élèves de revenir au changement d'indice $j = k + 1$ avant de simplifier une somme ou un produit télescopique.*
- retournement : $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{n-j}$, formule analogue pour le produit, exemple : calcul de $\sum_{k=0}^n k$
- coefficients binomiaux, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$. L'interprétation combinatoire de ces coefficients n'a pas été abordée en classe.
- formule de symétrie : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, d'absorption : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ et de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- triangle de Pascal

3 Exponentielle et logarithme

Formules élémentaires et résolutions d'équations.

Les résolutions d'inéquation et la définition de a^b si $b \notin \mathbb{Q}$ n'ont pas été vues en classe.

4 Informatique en langage Python

L'import de bibliothèque n'a pas été vu en classe. En particulier, on écrira les racines carrées avec des puissances 1/2.

- boucles while, algorithmes de seuil, exemples d'algorithmes d'approximation de $\sqrt{2}$ (méthode de Héron), de $\ln(2)$ (développement en série).

5 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire sur \mathbb{C} .
2. Résoudre sur \mathbb{C} : $z^2 = w$ où $w \in \mathbb{C}$ est une constante choisie par l'examinateur. *On précisera aux élèves si on souhaite qu'ils cherchent z sous forme algébrique ou polaire.*
3. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
4. Linéariser $\cos(\theta) \sin^2(\theta)$.
5. Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$ déterminer les valeurs de $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et de $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
6. En utilisant la valeur de $\sum_{k=0}^m q^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^n q^k$ pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $p \leq n$. (*via un "découpage"*) (cf TD 5, exo 2)
7. Pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $S = \sum_{k=0}^n q^k$ en effectuant un télescopage sur $(1 - q)S$.
8. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer et démontrer la formule de symétrie et/ou la formule d'absorption.
9. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer la formule de Pascal.
10. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$. On admet que (u_n) est décroissante et tend vers 0. Écrire une fonction Python `seuil` prenant en argument $\varepsilon > 0$ et renvoyant la plus grande valeur de u_n telle que $u_n < \varepsilon$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 4.1 (exponentielle et logarithme), tous les exos : <https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6497>

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.