Interro 8 : Corrigé

Question 1

1) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{2x-1}} = e^{x-1-(2x-1)} = e^{-x}$

2) $\left(e^{2x-1}\right)^2 \times \dfrac{1}{e^{3x-1}} = e^{2(2x-1)-(3x-1)} = e^{x-1}$

3) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}^2-1^2}{4}\right) = \ln(1) = 0$

4) $\ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) + 2\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) + \ln\left(\dfrac{y^2}{x^2}\right) = \ln\left(\dfrac{x^2}{y} \times \dfrac{y^2}{x^2}\right) = \ln(y)$

5) $\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{1-x}}\right) = \ln\left(e^{x-1}\right) = x-1$

Question 2 :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x-1} = \dfrac{1}{e^{2x}} \iff e^{x-1} = e^{-2x} \iff x-1 = -2x \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$ $\quad \mathcal{S}_1 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x} = 3e^{x} \iff e^{2x} = 3 \iff 2x = \ln(3) \iff x = \dfrac{\ln(3)}{2}$ $\quad \mathcal{S}_2 = \left\{\dfrac{\ln(3)}{2}\right\}$

3) Pour x tel que $x+1>0$ et $1-x>0$ i.e. pour $x \in]-1,1[$:

$\ln(x+1) - \ln(1-x) = \ln(2) \iff \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) = \ln(2) \iff \dfrac{x+1}{1-x} = 2$

$\iff x+1 = 2-2x \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$ $\quad \mathcal{S}_3 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

4) Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} = e^{x} + 2 \iff \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$ $(*)$. Après calcul, les racines de $X^2 - X - 2$ sont 2 et -1 donc :

$(*) \iff \begin{cases} y = e^x \\ y = 2 \text{ ou } y = -1 \end{cases} \iff \left(e^x = 2 \text{ ou } e^x = -1\right) \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$

$\mathcal{S}_4 = \{\ln(2)\}$

5) Pour x tel que $x^2>0$ i.e. pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\ln(x^2)=1 \iff x^2=e \iff x=\sqrt{e} \text{ ou } x=-\sqrt{e} \qquad \mathcal{S}_5=\{\sqrt{e},-\sqrt{e}\}$$

6) Pour $x\in\mathbb{R}$ (car $e^x+e^{-x}>0$ donc $\neq 0$) :

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{3} \iff 3(e^x-e^{-x})=e^x+e^{-x} \iff 2e^x=4e^{-x}$$

$$\iff \frac{e^x}{e^{-x}}=\frac{4}{2} \iff e^{2x}=2 \iff 2x=\ln(2) \iff x=\frac{\ln(2)}{2} \qquad \mathcal{S}_6=\left\{\frac{\ln(2)}{2}\right\}$$

<u>Remarques</u> • À la question 5) : il était incorrect d'écrire

$$\ln(x^2)=1 \iff 2\ln(x)=1 \iff \ln(x)=\frac{1}{2} \iff x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

car la relation $\ln(x^2)=2\ln(x)$ n'est valable que si $x>0$.

• À la question 4) de l'exo 1, il était moins judicieux d'écrire

$$\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)+2\ln\left(\frac{y}{x}\right)=\ln(x^2)-\ln(y)+2(\ln(y)-\ln(x))$$
$$=2\ln(x)-\ln(y)+2\ln(y)-2\ln(x)=\ln(y)$$

car - contrairement au corrigé ci-dessus - cela n'est valable que si $x>0$ et $y>0$

Comme l'énoncé ne demandait pas de s'intéresser aux valeurs possibles pour x et y, cette 2e méthode, quoique plus restreinte, sera aussi acceptée