NOM :

PRENOM :

Note sur 10 :

Bonus/malus de participation :

Note finale sur 10 :

Question 1 (/2pts).
Rappeler la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$. *Une définition complète est attendue*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on définit :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 2 (/2pts).
Énoncer la formule d'absorption pour les coefficients binomiaux. *Un théorème complet est attendu.*

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1,n]\!]$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Question 3 (/3pts).
Démontrer la formule d'absorption énoncée à la question précédente.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$, alors :

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n\times(n-1)!}{(k\times(k-1)!)(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Question 4 (/3pts). Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{4}$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x + e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} \neq 0$, on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{4} &\iff 4(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} \\ &\iff 3e^x = 5e^{-x} \\ &\iff e^{2x} = \frac{5}{3} \\ &\iff 2x = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right\}$.

NOM :

PRENOM :

Note sur 10 :

Bonus/malus de participation :

Note finale sur 10 :

Question 1 (/2pts).
Rappeler la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$. *Une définition complète est attendue*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on définit :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 2 (/2pts).
Énoncer la formule de symétrie pour les coefficients binomiaux. *Un théorème complet est attendu.*

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0,n]\!]$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Question 3 (/3pts). de symétrie
Démontrer la formule ~~d'absorption~~ énoncée à la question précédente.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, alors :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Question 4 (/3pts). Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{e^x - 2e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{4}$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x + e^{-x} > 0$, donc $2e^x + e^{-x} \neq 0$, on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^x - 2e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} = \frac{1}{4} \iff 4(e^x - 2e^{-x}) = 2e^x + e^{-x}$$
$$\iff 2e^x = 9e^{-x}$$
$$\iff e^{2x} = \frac{9}{2}$$
$$\iff 2x = \ln\left(\frac{9}{2}\right)$$
$$\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2}\right)$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{2}\right)\right\}$