

Exercice 1

1) On a : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \boxed{|z+z'| \leq |z|+|z'|}$.

En effet, on calcule que :

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2 \end{aligned}$$

Or $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| = |z||\bar{z}'| = |z||z'|$.

On a donc $|z+z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$

ou encore $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$.

Comme $|z+z'| \geq 0$ et $|z|+|z'| \geq 0$, en passant à la racine carrée on en déduit que $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on calcule que

$$\sin^2(\theta) \cos(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \times \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \times 4i^2} \times \left((e^{i\theta})^2 - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2 \right) (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$= \frac{1}{-8} \times (e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$= -\frac{1}{8} (e^{3i\theta} - 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} + e^{-3i\theta})$$

$$= -\frac{1}{8} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} - (e^{i\theta} + e^{-i\theta}))$$

$$= -\frac{1}{8} (2\cos(3\theta) - 2\cos(\theta))$$

$$= \boxed{\frac{\cos(\theta) - \cos(3\theta)}{4}}$$

3) a) Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 3e^{-x} > 0$, on résout pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2e^x - e^{-x}}{e^x + 3e^{-x}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(2e^x - e^{-x}) = e^x + 3e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 7e^x = 7e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow x = -x$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_1 = \{0\}$.

b) On commence par résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

On résout donc l'équation demandée pour $x \in]-\frac{1}{2}, 1[$:

$$\ln(2x+1) + \ln(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln((2x+1)(1-x)) = \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(1-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 - 2x^2 - x = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Comme $0, \frac{1}{2} \in]-\frac{1}{2}, 1[$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_2 = \{0, \frac{1}{2}\}$.

Exercice 2

1) a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \geq 1$ on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = (a+b)k + a$$

Pour que cette égalité soit vraie pour tout $k \geq 1$, il faut donc que :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\text{Finalement, } \forall k \geq 1, \quad \boxed{\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$$

b) D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \quad (\text{via } j=k+1)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \quad (\text{par télescopage})$$

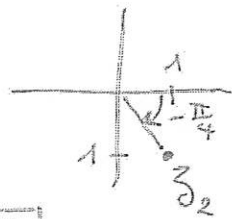
$$= \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$$

2) a) Commençons par déterminer les formes polaires de z_1 et z_2 .

On a : $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$, d'où

$z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$. Donc $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

On peut procéder de même pour z_2 ou s'appuyer sur un schéma pour voir que $|z_2| = \sqrt{2}$ et que $-\frac{\pi}{4}$ est un argument de z_2 , de sorte que $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$



Dès lors, $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{4}} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{12}}}$

b) On calcule que :

$$z_3 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} - i^2\sqrt{2}}{2(1^2 - i^2)}$$

Donc $\boxed{z_3 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

c) Comme $z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, en égalisant parties réelle et imaginaire de z_3 dans les 2 expressions données, on obtient que $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$.

Exercice 3

1) On a $\boxed{S_0(n) = n+1}$, $\boxed{S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

2) a) Via $j = n-k$ on a, puisque $k^3 = (n-j)^3$, et $0 \leq k \leq n \Leftrightarrow 0 \leq n-k \leq n$:

$$S_3(n) = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{j=0}^n (n-j)^3, \text{ donc, puisque l'indice } j \text{ est muet: } \underline{S_3(n) = \sum_{k=0}^n (n-k)^3}$$

b) On calcule que: $(n-k)^3 = (n^2 - 2kn + k^2)(n-k)$
 $= n^3 - 2kn^2 + k^2n - kn^2 + 2k^2n - k^3$
 $= \boxed{n^3 - 3kn^2 + 3k^2n - k^3}$

c) D'après les questions précédentes, on a:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \sum_{k=0}^n (n-k)^3 = \sum_{k=0}^n (n^3 - 3kn^2 + 3k^2n - k^3) \\ &= \sum_{k=0}^n n^3 - 3n^2 \sum_{k=0}^n k + 3n \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k^3 \\ &= n^3 S_0(n) - 3n^2 S_1(n) + 3n S_2(n) - S_3(n) \end{aligned}$$

Donc $2S_3(n) = n^3 S_0(n) - 3n^2 S_1(n) + 3n S_2(n)$

$$= n^3(n+1) - 3n^2 \frac{n(n+1)}{2} + 3n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} \times [2n - 3n + (2n+1)]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{2} \quad \text{et donc} \quad \boxed{S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

3) a) On calcule que: $(k+1)^4 - k^4 = (k+1)^2(k+1)^2 - k^4$

$$= (k^2 + 2k + 1)(k^2 + 2k + 1) - k^4$$

$$= k^4 + 2k^3 + k^2 + 2k^3 + 4k^2 + 2k + k^2 + 2k + 1 - k^4$$

$$= \boxed{4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}$$

b) On en déduit que:

$$T(n) = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n)$$

c) Par ailleurs, par "télécopage":

$$T(n) = \sum_{k=0}^n (k+1)^4 - \sum_{k=0}^n k^4 = \sum_{k=1}^{n+1} k^4 - \sum_{k=0}^n k^4 = (n+1)^4 - 0^4 = \boxed{(n+1)^4}$$

Dès lors, en utilisant la question b) on a:

$$(n+1)^4 = T(n) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n)$$

$$\text{donc } S_3(n) = \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - S_0(n) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \right)$$

$$= \frac{n+1}{4} \times \left((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \right)$$

$$= \frac{n+1}{4} \times \left((n+1)^3 - (2n+1)(n+1) \right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} \times \left((n+1)^2 - (2n+1) \right)$$

$$= \boxed{\frac{(n+1)^2 n^2}{4}}$$

4) a) Soient $p \leq q$ deux entiers naturels, on écrit (par "découpage"):

$$\sum_{j=p}^q (2j-1) = 2 \sum_{j=p}^q j - \sum_{j=p}^q 1$$

$$= 2 \left(\sum_{j=0}^q j - \sum_{j=0}^{p-1} j \right) - \sum_{j=p}^q 1$$

$$= 2 \left(\frac{q(q+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} \right) - (q-p+1)$$

$$= q^2 + q - (p^2 - p) - q + p - 1$$

$$= q^2 - (p^2 - 2p + 1)$$

$$= \boxed{q^2 - (p-1)^2}$$

b) Le tableau ne contenant que des nombres impairs, la somme L_k peut en effet s'écrire sous la forme $\sum_{j=1}^k (2j-1)$; reste à déterminer quels sont les bornes de cette somme. Remarquons que le terme $j=1$ correspond

au 1^{er} nombre impair ($2 \times 1 - 1 = 1$), le terme $j=2$ au 2^{ème} ($2 \times 2 - 1 = 3$), etc. Ainsi, pour savoir les termes de la somme L_k , il faut en fait savoir quels sont les "numéros" des nombres impairs apparaissant sur la $k^{\text{ème}}$ ligne. Comme il y a exactement i nombres sur la $i^{\text{ème}}$ ligne, alors les $(k-1)$ premières lignes du tableau contiennent en tout $\sum_{i=1}^{k-1} i = S_1(k-1)$ nombres, et le 1^{er} nombre impair de la $k^{\text{ème}}$ ligne est donc celui correspondant à $j = S_1(k-1) + 1$. Comme il y a k nombres sur la $k^{\text{ème}}$ ligne, alors le dernier nombre de cette ligne est celui correspondant à $j = S_1(k-1) + 1 + k - 1 = \left(\sum_{i=0}^{k-1} i\right) + k = \sum_{i=0}^k i = S_1(k)$.

Ainsi
$$L_k = \sum_{j=S_1(k-1)+1}^{S_1(k)} (2j-1)$$

c) En utilisant la question a) on a donc

$$\begin{aligned} L_k &= \left(S_1(k)\right)^2 - \left(S_1(k-1) + 1 - 1\right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 \\ &= \frac{k^2}{4} \times \left((k+1)^2 - (k-1)^2\right) = \frac{k^2}{4} (k^2 + 2k + 1 - (k^2 - 2k + 1)) \\ &= \frac{k^2}{4} \times 4k = \boxed{k^3} \end{aligned}$$

d) On a
$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=S_1(k-1)+1}^{S_1(k)} (2j-1) \right)$$

$$= \sum_{j=S_1(0)+1}^{S_1(1)} (2j-1) + \sum_{j=S_1(1)+1}^{S_1(2)} (2j-1) + \sum_{j=S_1(2)+1}^{S_1(3)} (2j-1) + \dots + \sum_{j=S_1(n-1)+1}^{S_1(n)} (2j-1)$$

$$= \sum_{j=S_1(0)+1}^{S_1(n)} (2j-1) = \sum_{j=1}^{n(n+1)/2} (2j-1), \text{ d'où, d'après la question a),}$$

$$S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - (1-1)^2 = \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Exercice 4:

1) def module(x, y):
 return (x**2 + y**2) ** (1/2)

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a:

$$\begin{aligned}x_{n+1} + iy_{n+1} = z_{n+1} &= z_n^2 + \frac{-1+i}{2} \\&= (x_n + iy_n)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\&= x_n^2 + 2x_n y_n i - y_n^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\&= \left(x_n^2 - y_n^2 - \frac{1}{2}\right) + i\left(2x_n y_n + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Identifiant parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\boxed{x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2x_n y_n + \frac{1}{2}}$$

3) def suite(n, x0, y0):

$$x, y = x_0, y_0$$

for k in range(n):

$$x, y = x^2 - y^2 - 1/2, 2 * x * y + 1/2$$

return x, y

4) def intJ(x0, y0):

n = 0

z = x0, y0

while module(z) <= 2 and n < 101 : # on fait les itérations tant que $|z_n| \leq 2$ et $n < 101$

n = n + 1

z = suite(n, x0, y0) # (*)

if n == 101: # n à la fin de la boucle while n vaut 101 c'est que $\forall n \in [0, 100], |z_n| \leq 2$.

return True

else : return False

5) Il suffit d'écrire : return n == 101

6) Lorsqu'on utilise la fonction suite, en (*), Python calcule la valeur de z_n en partant de la valeur de z_0 et en faisant n itérations de la relation de récurrence définissant la suite (z_n) . Comme on calcule successivement tous les termes de la suite, de z_0 à z_{100} , il est plus économique de garder en mémoire la valeur de z_n au fur et à mesure.

On propose donc le code suivant :

def intJ_bis(x0, y0):

n = 0

x, y = x0, y0

while module(x, y) <= 2 and n < 101:

n = n + 1

x, y = $x**2 - y**2 - 1/2$, $2*x*y + 1/2$

return n == 101

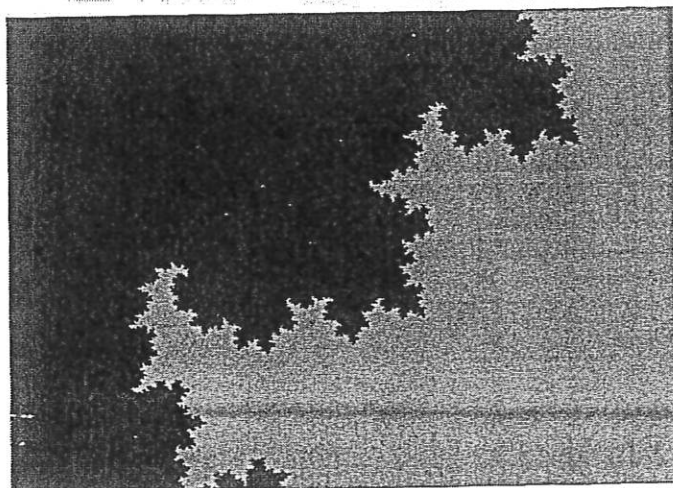
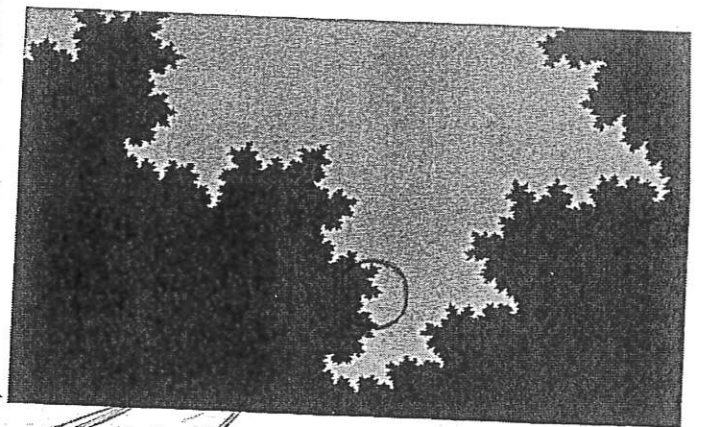
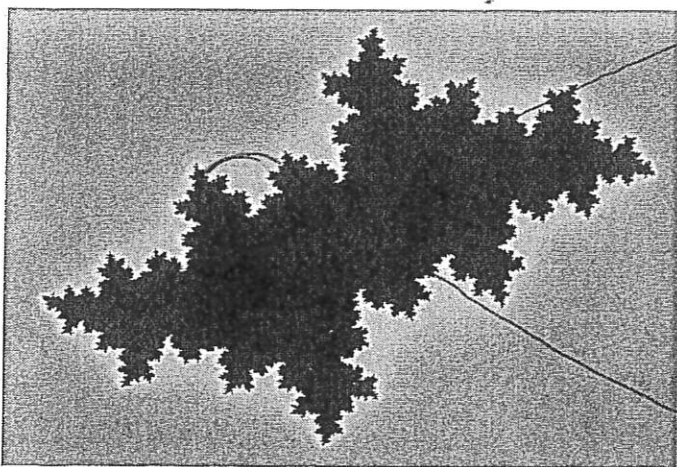
Et la remarque culturelle ?

Pour le DS3 cette remarque concerne l'exercice 4 de Pythm et l'ensemble de Julia.

$$J = \{ z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq 2 \}$$

Puisqu'il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, l'ensemble J peut être représenté géométriquement dans le plan, par exemple en coloriant en noir les points d'afixe $z_0 \in J$ et en laissant en blanc (ou en rouge, ou ci-dessous, en gris) les points d'afixe $z_0 \notin J$.

On obtient alors le dessin ci-dessous où on remarque que la frontière de J est très irrégulière. En zoomant sur certaines zones, ces irrégularités ne disparaissent pas, elles sont présentes à n'importe quelle échelle, aussi petite soit-elle. On dit que l'ensemble J est "fractal".



zooms successifs
sur l'ensemble de Julia

etc...

Le phénomène étrange se produit en fait pour beaucoup de suites récurrentes du type : $z_{n+1} = z_n^2 + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

L'ensemble $J_c = \{ z_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que la suite } (|z_n|) \text{ est bornée} \}$ est appelé "ensemble de Julia de c ". L'image précédente est donc l'ensemble de Julia de $\frac{-1+i}{2}$.

En suivant le lien (non cliquable ^^) :

<https://sciencedemos.org.uk/julia.php>

on peut visualiser des ensembles de Julia en choisissant la valeur de c (saisissez les valeurs de $x_0 = \text{Re}(c)$ et $y_0 = \text{Im}(c)$ dans "choice of Julia set") et zoomer pour en explorer la structure "fractale".

Enfin, les ensembles de Julia sont très proches de l'ensemble de Mandelbrot, un autre sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini à partir d'une relation du type $z_{n+1} = z_n^2 + c$, et présentant une structure "fractale" impressionnante devant la simplicité de la relation de récurrence étudiée. La vidéo "Deux (deux?) minutes pour Mandelbrot" du youtubeur "El Jj" en présente la construction :

<https://youtube.com/watch?v=Y4ECbYtBGzA>