Programme de colles : semaine 7, du 17/11 au 21/11

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Sommes et produits

La formule de Bernoulli, et la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ n'ont pas été vus en classe.

- symboles $\sum$ et $\prod$, caractère muet de l'indice de sommation, convention $\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0$ et $\prod_{k\in\emptyset} a_k = 1$.
- exemple de la factorielle
- règles de calcul : linéarité de la somme, somme d'une constante, formules analogues pour les produits
- $\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \exp(a_k)$
- $\ln\left(\prod_{k=p}^{n} b_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(b_k)$
- $\prod_{k=p}^{n} \lambda^{a_k} = \lambda^{\sum_{k=p}^{n} a_k}$
- démonstration d'une valeur de somme/produit par récurrence
- découpage : relation de Chasles, exemples : écriture de $\prod_{k=p}^{n} k$ avec des factorielles, formules pour $\sum_{k=m}^{n} q^k$ et $\sum_{k=m}^{n} k$. *Ces deux dernières formules ne sont pas à connaître par cœur mais doivent pouvoir être retrouvées sans difficulté.*
- décalage : $\sum_{k=p}^{n} a_{k+r} = \sum_{j=p+r}^{n+r} a_j$, formule analogue pour le produit
- téléscopage : $\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$, $\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$, exemple : calcul de la somme géométrique. *On conseille aux élèves de revenir au changement d'indice $j = k+1$ avant de simplifier une somme ou un produit téléscopique.*
- retournement : $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-m} a_{n-j}$, formule analogue pour le produit, exemple : calcul de $\sum_{k=0}^{n} k$
- coefficients binomiaux, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$. *L'interprétation combinatoire de ces coefficients n'a pas été abordée en classe.*
- formule de symétrie : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, d'absorption : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ et de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- triangle de Pascal
- formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, exemple : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
- sommes doubles rectangulaires : $\sum_{\substack{n_0\le i\le n_1\\ p_0\le j\le p_1}}$.
- On note $\sum_{n_0\le i,j\le n_1} = \sum_{\substack{n_0\le i\le n_1\\ n_0\le j\le n_1}}$
- cas des termes séparables pour les sommes rectangulaires : $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)$
- sommes triangulaires : $\sum_{n_0\le i\le j\le n_1}$ et triangulaires strictes $\sum_{n_0\le i<j\le n_1}$
- choix judicieux de l'ordre de sommation : exemple du calcul de $\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{1}{j}$
- séparation d'une somme rectangulaire en sommes triangulaires : $\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j} + \sum_{1\le j<i\le n} a_{i,j}$. Exemple : calcul de $\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j)$

2 Exponentielle et logarithme

Formules élémentaires et résolutions d'équations.
Les résolutions d'inéquation et la définition de a^b si $b \notin \mathbb{Q}$ n'ont pas été vues en classe.

3 Informatique en langage Python

L'import de bibliothèque n'a pas été vu en classe. En particulier, on écrira les racines carrées avec des puissances 1/2.
Attention, seul le parcours par indices a été abordé en classe. Modification et suppression d'éléments seront également vus plus tard.

Listes :

- création par `append` successifs depuis la liste vide, création par la syntaxe `[f(k) for k in L]` où `L` est une autre liste ou un range
- parcours d'une liste par ses indices
- fonctions `sum`, `len`, test `in`, concaténation de listes

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. En utilisant la valeur de $\sum_{k=0}^{m} q^k$, déterminer la valeur de $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $p \leq n$. *(via un "découpage")* (*cf* TD 5, exo 2)
2. Pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$ en effectuant un téléscopage sur $(1-q)S$.
3. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer et démontrer la formule de symétrie et/ou la formule d'absorption.
4. Rappeler la définition des coefficients binomiaux puis énoncer la formule de Pascal.
5. Énoncer la formule du binôme de Newton.
6. À l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal, développer rapidement $(1+x)^5$ et $(x-1)^5$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou des quantités similaires choisies par l'examinateur).
7. Calculer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$.
8. Calculer $\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.
9. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant la liste `[`u_0`,`u_1`,...,`u_n`]` où (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 1$.
10. Écrire une fonction Python prenant en arguments une liste de nombres et renvoyant la somme de ses éléments en effectuant un parcours par indices.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 4.1 (exponentielle et logarithme), tous les exos :
`https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6497`

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.