NOM :

PRENOM :

Note sur 5 :

Bonus/malus de participation :

Note finale sur 5 :

Question 1 (/2pts). Énoncer la formule du binôme de Newton.

$$\forall a,b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Question 2 (/1,5pt). Calculer la somme suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n+k}$.

$$S = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n+k}\right) - \binom{n}{0} 2^{n+0}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^n 2^k\right) - 2^n$$

$$= \left(2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}\right) - 2^n = 2^n(2+1)^n - 2^n = \boxed{6^n - 2^n}$$

Question 3 (/1,5pt). Calculer la somme double suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $T = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i}$.

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (i+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1+2)}{2} = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$$

BCPST 1B — **Interro 10 - Sujet A** — 2025-2026

NOM :

PRENOM :

Note sur 5 :

Bonus/malus de participation :

Note finale sur 5 :

Question 1 (/2pts). Énoncer la formule du binôme de Newton.

$$\forall a,b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Question 2 (/1,5pt). Calculer la somme suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-2k}$.

$$S = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-2k}\right) - \binom{n}{0} 2^{n-2\times 0}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 2^{-k}\right) - 2^n$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) - 2^n = \left(2+\frac{1}{2}\right)^n - 2^n = \boxed{\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2^n}$$

Question 3 (/1,5pt). Calculer la somme double suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $T = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

$$T = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \times \sum_{i=1}^{j} i\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1+2)}{2} = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$$