

Feuille de cours 6.2 : calculs de dérivées

1 Dérivées des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, on rappelle son ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'_f$ et l'expression de sa dérivée f' :

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}'_f$	$f'(x)$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$
x^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n x^{n-1}$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}_*^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\mathbb{R}_*^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$\frac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Exemples :

- Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x^4}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^{-4}$, la dérivée de f est donnée par :
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -4x^{-4-1} = -\frac{4}{x^5}$.
- Soit $g : x \longmapsto x^\pi$. La dérivée de g est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, g'(x) = \pi x^{\pi-1}$.

2 Opérations

Proposition 1

Soient $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques dérivables sur $\mathcal{D}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

1. $f + g$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(f + g)' = f' + g'$.
2. λf est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
3. fg est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(fg)' = f'g + g'f$.
4. Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$ et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Exemples :

- Soit $h : x \mapsto \sqrt{x} \cos(x)$. En notant $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \cos(x)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(x) - \sin(x)\sqrt{x}.$$

- Soit $k : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\cos(x)}$. En notant $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \cos(x)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(x) - (-\sin(x)\sqrt{x})}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) + 2x \sin(x)}{2\sqrt{x} \cos^2(x)}.$$

- Soit $u : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3}$. En notant $f : x \mapsto x^2 + 3$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}.$$

Exercice 1

Dérivez les fonctions suivantes (on ne s'intéressera pas aux ensembles de dérivabilité).

1. $f_1 : x \mapsto 3e^x - \sqrt{x} + \arctan(x)$
2. $f_2 : x \mapsto x^2 \cos(x)$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{2x - 1}{-x + 2}$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{e^x + x^2}$ (sans utiliser la formule pour le quotient)
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ (sans utiliser la formule pour l'inverse)
6. $f_6 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{e^x}$
7. $f_7 : x \mapsto \frac{3}{x^4}$

8. $f_8 : x \mapsto \frac{e^x + x}{2}$
9. $f_9 : x \mapsto \frac{1 - x^2}{3x - 2x^2}$
10. $f_{10} : x \mapsto \frac{1}{-2x^2 + 3x - 1}$
11. $f_{11} : x \mapsto x - \ln(x)$
12. $f_{12} : x \mapsto x \ln(x)$
13. $f_{13} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
14. $f_{14} : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{1 + x}$
15. $f_{15} : x \mapsto \frac{\cos(x)e^x}{x^2}$

3 Dérivées des composées usuelles

Soit $u : \mathcal{D}_u \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable sur $\mathcal{D}_u$. Pour chacune des fonctions composées suivantes, on donne l'équation à résoudre pour connaître son ensemble de définition $\mathcal{D}$, son ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'$, et on donne sa dérivée :

composée	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'$	dérivée
$(u(x))^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$n \ u'(x) \ (u(x))^{n-1}$
$(u(x))^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$	$u \neq 0$	$u \neq 0$	$n \ u'(x) \ (u(x))^{n-1}$
$(u(x))^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$u > 0$	$u > 0$	$\alpha \ u'(x) \ (u(x))^{\alpha-1}$
$\frac{1}{u(x)}$	$u \neq 0$	$u \neq 0$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$u \geq 0$	$u > 0$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$u > 0$	$u > 0$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\exp(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$u'(x) \ \exp(u(x))$
$\sin(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$u'(x) \ \cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$-u'(x) \ \sin(u(x))$
$\tan(u(x))$	$u \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$	$u \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$	$u'(x) (1 + \tan^2(u(x))) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\arctan(u(x))$	$\mathcal{D}_u$	$\mathcal{D}_u$	$\frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$

D'où viennent toutes ces formules et comment les retrouver rapidement ? Grâce à la proposition suivante :

Proposition 2

Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques telles que $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et g sur $\mathcal{D}_g$ alors $f \circ g$ est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g).$$

En particulier, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, la fonction $h : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = a f'(ax + b)$$

Exemples :

- Soit $f : x \mapsto \cos(\pi x - 4)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \pi \cos'(\pi x - 4) = -\pi \sin(\pi x - 4).$$

- Soit $g : x \mapsto e^{\sin(x)}$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \sin'(x) \exp'(\sin(x)) = \cos(x) e^{\sin(x)}.$$

- Soit $h : x \mapsto \arctan^5(x)$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 5 \arctan'(x) (\arctan(x))^4 = \frac{5(\arctan(x))^4}{1+x^2}.$$

- Soit $k : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. Comme la dérivée de $x \mapsto x^2 + 1$ est $x \mapsto 2x$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, k'(x) = 2x \times \ln'(x^2 + 1) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Exercice 2

Dérivez les fonctions suivantes (on ne s'intéressera pas aux ensembles de dérivabilité).

- | | |
|--|--|
| 1. $f_1 : x \mapsto e^{-5x+2}$ | 11. $f_{11} : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$ |
| 2. $f_2 : x \mapsto \cos(2x + 1) - e^{-x-2}$ | 12. $f_{12} : x \mapsto \cos^{12}(2x)$ |
| 3. $f_3 : x \mapsto \sin^3(x)$ | 13. $f_{13} : x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ |
| 4. $f_4 : x \mapsto \ln(\cos(x))$ | 14. $f_{14} : x \mapsto \ln(\ln(x))$ |
| 5. $f_5 : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ | 15. $f_{15} : x \mapsto (x^2 + x + 1)^\pi$ |
| 6. $f_6 : x \mapsto e^{2x} \tan(4x)$ | 16. $f_{16} : x \mapsto e^{\cos(\cos(x))}$ |
| 7. $f_7 : x \mapsto \sqrt{2-x}$ | 17. $f_{17} : x \mapsto \arctan(\frac{1}{x})$ |
| 8. $f_8 : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ | 18. $f_{18} : x \mapsto \ln(\ln(x))$ |
| 9. $f_9 : x \mapsto \sin(x^3)$ | 19. $f_{19} : x \mapsto \ln\left(\frac{-x^2 + 1}{2x - 4}\right)$ |
| 10. $f_{10} : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$ | 20. $f_{20} : x \mapsto \cos(\sin(\cos(x)))$ |

Exercice 3 (exercice bonus)

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule donnant $(f_1 f_2)'$.
2. Déterminer une formule donnant $(f_1 f_2 f_3)'$.
3. De manière générale, déterminer une formule donnant $\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)'$