

Programme de colles : semaine 8, du 24/11 au 28/11

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Sommes et produits

La formule de Bernoulli, et la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$ n'ont pas été vus en classe.

- binôme de Newton
- sommes doubles

2 Études de fonctions

Nous n'avons pas encore fait d'étude complète de fonctions en classe. On proposera des exercices d'applications directes des définitions ci-dessous.

On insistera sur la différence entre f et $f(x)$.

- ensemble de définition et d'arrivée, vocabulaire
- savoir déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité d'une fonction donnée
- opérations, composition
- fonctions monotones, strictement monotones
- fonctions paires, impaires, périodiques, interprétation graphique
- lien entre dérivée et sens de variation
- équation de la tangente au graphe en un point
- calculs de dérivées : dérivées des fonctions usuelles (dont arctan), dérivée d'un produit, d'un quotient, dérivées des composées usuelles, formule de la dérivée d'une composée

3 Informatique en langage Python

L'import de bibliothèque n'a pas été vu en classe. En particulier, on écrira les racines carrées avec des puissances $1/2$.

La copie de liste n'a pas encore été abordée en classe.

Listes :

- création par `append` successifs depuis la liste vide, création par la syntaxe `[f(k) for k in L]` où `L` est une autre liste ou un range
- parcours d'une liste par ses indices
- fonctions `sum`, `len`, test `in`, concaténation de listes
- sous-listes `L[p:q]`, `L[p:]`, `L[:q]`, `L[p:q:r]`
- modification d'un élément d'une liste
- suppression d'un élément d'une liste avec la commande `L.pop(k)` ou `x = L.pop(k)`. *La fonction `del` n'a pas été vue en classe.*
- parcours par éléments. *On recommande aux élèves d'utiliser en priorité les parcours par indices.*

4 Questions de cours

Cette semaine, toutes les colles doivent suivre le schéma suivant :

1. une question de cours d'informatique
2. une question de cours de mathématiques
3. deux calculs de dérivées, du type des exercices 1 et 2 de la feuille de cours 6.2 :
<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6596>
4. exercices sur le programme

Questions d'informatique :

1. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant la liste $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ où (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 1$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument une liste de nombres et renvoyant la somme de ses éléments en effectuant un parcours par indices.
3. Écrire une fonction Python `minimum` prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant le minimum de cette liste.
4. Rappeler la définition de la moyenne et de l'écart type d'une série $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de nombres réels. Écrire deux fonctions Python prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant respectivement leur moyenne et leur écart-type (cf TP 8).
5. Écrire une fonction `appartient` prenant en argument une liste `L` et une variable `a` et renvoyant `True` si `a` apparaît dans `L` et `False` sinon. On n'utilisera pas l'instruction `a in L`.
6. Écrire une fonction Python `transforme` prenant en argument une liste et la renvoyant après avoir transformé tous les 4 qu'elle contient en des 5.

Questions de mathématiques :

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.
2. À l'aide du binôme de Newton et du triangle de Pascal, développer rapidement $(1+x)^5$ et $(x-1)^5$ pour $x \in \mathbb{R}$ (ou des quantités similaires choisies par l'examineur).
3. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ ou $\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.
4. Si $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$, donner la définition de $f \circ g$. On précisera son ensemble de définition en fonction de D_f et D_g . Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ pour deux fonctions f et g simples choisies par l'examineur.
5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de " f est (strictement) (dé)croissante sur I ".
6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à la fois croissante et décroissante sur I . Démontrer que f est constante sur I .
7. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de " f est (im)paire".
8. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}$. Donner la définition de " f est T -périodique".
9. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.
10. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 . Donner l'équation de la tangente au graphe de f en x_0 .

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.