

Programme de colles : semaine 9, du 1/12 au 5/12

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Études de fonctions

On insistera sur la différence entre f et $f(x)$.

- ensemble de définition et d'arrivée, vocabulaire
- savoir déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité d'une fonction donnée
- opérations, composition
- fonctions monotones, strictement monotones
- fonctions paires, impaires, périodiques, interprétation graphique
- lien entre dérivée et sens de variation
- équation de la tangente au graphe en un point
- calculs de dérivées : dérivées des fonctions usuelles (dont arctan), dérivée d'un produit, d'un quotient, dérivées des composées usuelles, formule de la dérivée d'une composée
- fonctions usuelles : pour chacune des fonctions suivantes, connaître : les ensembles de définition et d'arrivée, la dérivée, le sens de variation, les limites, les éventuelles parité et périodicité, l'allure du graphe : *Les graphes du logarithme décimal et de $x \mapsto a^x$ pour $a \neq e$ n'ont pas été donnés en classe. Le lien entre les graphes d'une fonction et de sa réciproque n'a pas été mentionné en classe.*

1. logarithme, logarithme de base a
 2. exponentielle, exponentielle de base a .
 $\boxed{\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = \exp(b \ln(a))}$
 3. cosinus, sinus, tangente, arctangente
 4. fonctions puissances $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$
 5. valeur absolue
- schéma d'étude d'une fonction :
 1. ensemble de définition
 2. restriction de l'ensemble d'étude par parité et/ou périodicité
 3. ensemble de dérivabilité
 4. calcul de la dérivée
 5. recherche du signe de la dérivée

6. tableau de variations

7. limites et valeurs d'intérêt. *Les calculs de limites (notamment les formes indéterminées) n'ont pas été revus en classe. Les élèves ne doivent pas hésiter à demander de l'aide pour calculer une limite.*

8. allure du graphe

- obtention d'inégalités par étude de fonction.
- notion d'extremum global/local. *Seule la définition et l'interprétation graphique ont été abordées en classe.*
- partie entière : pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $[x] = n$ si et seulement si $n \leq x < n + 1$. *Les autres caractérisations de la partie entière n'ont pas été vues en classe.*
- propriétés de la fonction partie entière : graphe, caractère croissant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x + 1] = [x] + 1$

2 Informatique en langage Python

La copie de liste n'a pas encore été abordée en classe.

Listes :

- création par `append` successifs depuis la liste vide, création par la syntaxe `[f(k) for k in L]` où `L` est une autre liste ou un range
- parcours d'une liste par ses indices
- fonctions `sum`, `len`, test `in`, concaténation de listes
- sous-listes `L[p:q]`, `L[p:]`, `L[:q]`, `L[p:q:r]`
- modification d'un élément d'une liste
- suppression d'un élément d'une liste avec la commande `L.pop(k)` ou `x = L.pop(k)`. *La fonction `del` n'a pas été vue en classe.*
- parcours par éléments. *On recommande aux élèves d'utiliser en priorité les parcours par indices.*

3 Questions de cours

Cette semaine, toutes les colles doivent suivre le schéma suivant :

- A) une question de cours d'informatique
- B) une question de cours de mathématiques
- C) deux calculs de dérivées, du type des exercices 1 et 2 de la feuille de cours 6.2 :
<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6596>
- D) exercices sur le programme

Questions d'informatique :

1. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant la liste $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ où (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 1$.
2. Écrire une fonction Python `minimum` prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant le minimum de cette liste.
3. Rappeler la définition de la moyenne et de l'écart type d'une série (x_1, x_2, \dots, x_n) de nombres réels. Écrire deux fonctions Python prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant respectivement leur moyenne et leur écart-type (*cf TP 8*).
4. Écrire une fonction `appartient` prenant en argument une liste L et une variable a et renvoyant True si a apparaît dans L et False sinon. On n'utilisera pas l'instruction a in L.
5. Écrire une fonction Python `transforme` prenant en argument une liste et la renvoyant après avoir transformé tous les 4 qu'elle contient en des 5.

Questions de mathématiques :

1. Si $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$, donner la définition de $f \circ g$. On précisera son ensemble de définition en fonction de D_f et D_g . Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ pour deux fonctions f et g simples choisies par l'examinateur.
2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est (strictement) (dé)croissante sur I ”.
3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à la fois croissante et décroissante sur I . Démontrer que f est constante sur I .
4. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est (im)paire”.
5. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est T -périodique”.
6. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si $0 \in D$ alors $f(0) = 0$.
7. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 . Donner l'équation de la tangente au graphe de f en x_0 .
8. Présenter une fonction usuelle parmi : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, inverse, racine carrée, logarithme, exponentielle, $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, cosinus, sinus, tangente, valeur absolue.
9. Démontrer par une étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x$.
10. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f admet un minimum en a ”. On pourra remplacer “minimum” par “minimum local”, “maximum”, “maximum local”.

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.