

TD 6 : exo 9

1) a) fait en classe

b) On distingue 2 cas en utilisant que $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $0 \leq t < 1$:

• Si $0 \leq t < \frac{1}{2}$ alors $x + \frac{1}{2} = \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \leq t + \frac{1}{2} < 1$ donc $0 \leq t + \frac{1}{2} < 1$
et donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$

$$\text{Ainsi } \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

• Si $\frac{1}{2} \leq t < 1$ alors $x + \frac{1}{2} = \lfloor x \rfloor + 1 + (t - \frac{1}{2})$ alors $0 \leq t - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ donc $0 \leq t - \frac{1}{2} < 1$
et donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq \lfloor x \rfloor + 1 + (t - \frac{1}{2}) < \lfloor x \rfloor + 1 + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 2$

$$\text{Ainsi } \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

c) • Si $0 \leq t < \frac{1}{2}$ alors $2x = 2\lfloor x \rfloor + 2t$ avec $0 \leq 2t < 1$ donc

$$2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1 \text{ donc } \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$$

• Si $\frac{1}{2} \leq t < 1$ alors $2x = 2\lfloor x \rfloor + 1 + (2t - 1)$ avec $1 \leq 2t < 2$ donc $0 \leq 2t - 1 < 1$

$$\text{donc } 2\lfloor x \rfloor + 1 \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2 \text{ donc } \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$$

d) D'après les questions précédentes:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } 0 \leq t < \frac{1}{2} : \text{ alors } \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor &= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor \quad (\text{qb}) \\ &= 2\lfloor x \rfloor \\ &= \lfloor 2x \rfloor \quad (\text{qc}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } \frac{1}{2} < t \leq 1 : \text{ alors } \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor &= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 \quad (\text{qb}) \\ &= 2\lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \lfloor 2x \rfloor \quad (\text{qc}) \end{aligned}$$

Sous tous les cas, on a bien montré que $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$

2) Suivre la même démarche en distinguant les 3 cas

$$\bullet 0 \leq t < \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} \leq t < 1$$