Feuille de cours 7 : inclusions d'ensembles

2 Comparaisons d'ensembles : inclusion, égalité

2.1 Inclusion

Définition 1
Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On dit que A est *inclus* dans B, et on note $A \subset B$ lorsque :

$$(\forall x \in A,\ x \in B) \quad \text{ou encore lorsque} \quad (\forall x \in E,\ (x \in A \implies x \in B)).$$

Exemples :
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\{0, 1, 2\} \not\subset \{1, 2, 3\}$.
- On a les inclusions d'ensembles suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Le point le plus important à retenir est le suivant :
Méthode : pour montrer l'inclusion $A \subset B$ il faut : "prendre" un $x \in A$ quelconque et montrer que $x \in B$. On commence généralement une telle preuve par l'expression "soit $x \in A$" qui sinifie "prenons x un élément *quelconque* de A".

Rappel :
- Pour un ensemble défini par équation $A = \{x \in E\ :\ P(x)\}$ on a :

$$x \in A \ \text{ si et seulement si}$$

- Pour un ensemble défini par paramétrage $B = \{f(t),\ t \in E\}$ on a

$$x \in B \ \text{ si et seulement si}$$

Exercice 1
Soient $A = \{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subset B$

Exercice 2
Soient $A = \{(2n+1)^2,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2m+1,\ m \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $A \subset B$.

2.2 Égalité : raisonnement par double inclusion

Définition 2
Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Les ensembles A et B son égaux lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$, c'est-à-dire que :

$$A = B \text{ si et seulement si } (A \subset B \text{ et } B \subset A) \text{ si et seulement si } (\forall x \in E,\ (x \in A \iff x \in B)).$$

De même que pour montrer l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ entre deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ on prouve "les deux sens" $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$; pour prouver l'égalité d'ensembles $A = B$ on fait "les deux inclusions" $A \subset B$ et $B \subset A$. On parle de raisonnement par *double inclusion.*

Exercice 3
On définit les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$E = \{(t, 4t-1),\ t \in \mathbb{R}\} \text{ et } F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$$

Montrer que $E = F$.

Souvent, une des deux inclusions est “triviale” : montrez par exemple que $\{x+y,\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Des raisonnements par double inclusion montrent des égalités entre ensembles définis par paramétrage :

Exercice 4
Soient $A = \{(x, 2x+1, x-2),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(z+2, 2z+5, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.
Monter que $A = B$.

Il est aussi possible de ne pas raisonner par double inclusion. Pour montrer que $A = B$, on peut directement montrer que $x \in A \iff x \in B$. C'est souvent le cas pour des ensembles définis par équations :

Exercice 5
Soient $A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2\ :\ x^2 - y^2 \geq x + y\}$ et $B = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2\ ;\ x \geq y + 1\}$. Montrer que $A = B$.

2.3 Négation d'une inclusion

Pour A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E, la négation de $A \subset B$ est notée $A \not\subset B$. Par négation d'une phrase avec des quantificateurs, on a : $A \not\subset B$ si et seulement si :

Exercice 6
Montrer que $\{z \in \mathbb{C} \ : \ z^4 = 1\} \not\subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^2 = 1\}$.

Exercice 7
Soient $A = \left\{ \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2} \right), \ t \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $B \not\subset A$ en considérant l'élément $(-1, 0)$.

Définition 3
Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E tels que $A \subset B$. Lorsque $B \not\subset A$, on dit que l'inclusion $A \subset B$ est *stricte* et on note $A \subsetneq B$.

Par exemple : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ comme l'illustre le schéma suivant :