# Calculs de limites : opérations

**Nota bene :** souvent, on préfèrera écrire $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ plutôt que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Cela permet en particulier de mener des calculs avant de conclure à la limite. Par exemple, l'écriture suivante est correcte :

$$\frac{1+e^x}{e^x} = e^{-x} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

mais l'écriture ci-dessous ne l'est pas (car on ne sait pas encore si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+e^x}{e^x}$ existe avant de mener le calcul) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 1 = 1$$

Enfin, on ne confondera pas les expressions "tend vers" et "égal". Dire par exemple que "la limite de $e^x$ quand $x$ tend vers $+\infty$ *tend* vers $+\infty$" est incorrect.

## 1 Limites des fonctions usuelles

On rappelle les limites suivantes, issues du cours :

- pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n =$
- pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \left\{ \right.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) =$
- pour $q \in \mathbb{R}$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \left\{ \right.$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) =$
- $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) =$

Par ailleurs, si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $f$ est continue en $x_0$ (en particulier si $f$ est continue sur son ensemble de définition), alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to0} e^x =$ , $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+1}{2-x} =$

## 2 Opérations algébriques

Lorsqu'on connaît les limites de deux quantités $f(x)$ et $g(x)$, on peut *souvent* en déduire la limite de $f(x)+g(x)$, $f(x)\times g(x)$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Attention, dans certains cas on ne peut pas conclure en l'état : on dit qu'on a une forme indéterminée (F.I.), il peut alors y avoir ou non de limite, finie ou non. Par exemple, si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, alors on ne peut pas conclure quant à la limite de $f(x)+g(x)$ en $+\infty$, c'est la forme indéterminée "$\infty - \infty$".

On considère des fonctions $f$ et $g$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- **Somme :** Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x)$ est donné par

| $+$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $\ell' = -\infty$ | $\ell' = +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell \in \mathbb{R}$ | $\ell + \ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell = -\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | F.I. |
| $\ell = +\infty$ | $+\infty$ | F.I. | $+\infty$ |

- **Produit :** Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) \times g(x)$ est donné par

| $\times$ | $\ell' < 0$ | $\ell' = 0$ | $\ell' > 0$ | $\ell' = -\infty$ | $\ell' = +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell < 0$ | $\ell \times \ell'$ | $0$ | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell = 0$ | $0$ | $0$ | $0$ | F.I. | F.I. |
| $\ell > 0$ | $\ell \times \ell'$ | $0$ | $\ell \times \ell'$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell = -\infty$ | $+\infty$ | F.I. | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell = +\infty$ | $-\infty$ | F.I. | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

- **Quotient :** Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ est donné par

| $\div$ | $\ell' < 0$ | $\ell' = 0^-$ | $\ell' = 0^+$ | $\ell' > 0$ | $\ell' = -\infty$ | $\ell' = +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ell < 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $0$ |
| $\ell = 0$ | $0$ | F.I. | F.I. | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\ell > 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $0$ |
| $\ell = -\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | F.I. | F.I. |
| $\ell = +\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I. | F.I. |

**Attention :** Pour déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Si $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$, alors il faut s'intéresser au signe de $g(x)$ lorsque $x \longrightarrow x_0$ pour savoir si $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0^+$ ou $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0^-$.

**Nota bene :** Par définition,

| | |
|---|---|
| $x \to x_0^+$ signifie : | $x \to x_0^-$ signifie : |

**Exemple :** Déterminer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{2x+1}{x-1}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{x+2}{3-x}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2-4}$

# 3 Composition de limites

**Proposition 1**

*Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, soit $x_0$ un point de $I$ ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$), et soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*
*Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ et $g(y) \xrightarrow[y \to \ell]{} \ell'$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell'$.*

**Exemple :** Déterminer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x}$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \ln|x|$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{1+\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} 2^{1/x}$

**Exercice 1**
Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - \ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x - x}{\ln(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + x}{\ln(x)}$

**Exercice 2**
Déterminer les limites suivantes ou préciser s'il s'agit d'une forme indéterminée :

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1-2x^2}{1-x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{xe^x}{\ln x}$
6. $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{\dfrac{1}{|x-1|}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-x}$
10. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{x - e^{1/x}}$