

TD 6 :

exo 6 :

1) f est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathbb{R}$,

• $f(-x) = \cos(-3x) \cos^3(-x) = \cos(3x) \cos^3(x) = f(x)$ donc f est paire

• $f(x+\pi) = \cos(3x+3\pi) \cos^3(x+\pi)$
 $= -\cos(3x) \times (-\cos(x))^3 = \cos(3x) \cos^3(x) = f(x)$

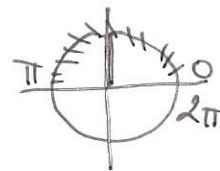
donc f est π -périodique.

Ainsi on se contente d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2) Notons $u(x) = \cos(3x)$ et $v(x) = \cos^3(x)$ alors $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -3\sin(3x)\cos^3(x) - \cos(3x) \times 3\cos^2(x)\sin(x)$
 $= 3\cos^2(x)(-\sin(3x)\cos(x) - \cos(3x)\sin(x)) = 3\cos^2(x) \times (-\sin(3x+x))$
 $= -3\cos^2(x)\sin(4x)$. Et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $3\cos^2(x) \geq 0$ donc $f'(x)$ est du même signe de $-\sin(4x)$.

3) Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $4x \in [0, 2\pi]$. On lit alors sur le cercle trigonométrique que $\sin(4x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 4x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$ (même signe de $-\sin(4x)$)	-	0	+
f	1	$\frac{1}{4}$	0

De plus, $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$,

$f(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4}) \cos^3(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = -\frac{1}{4}$

Et on remarque que $f'(0) = f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

D'où finalement le graphe suivant :

